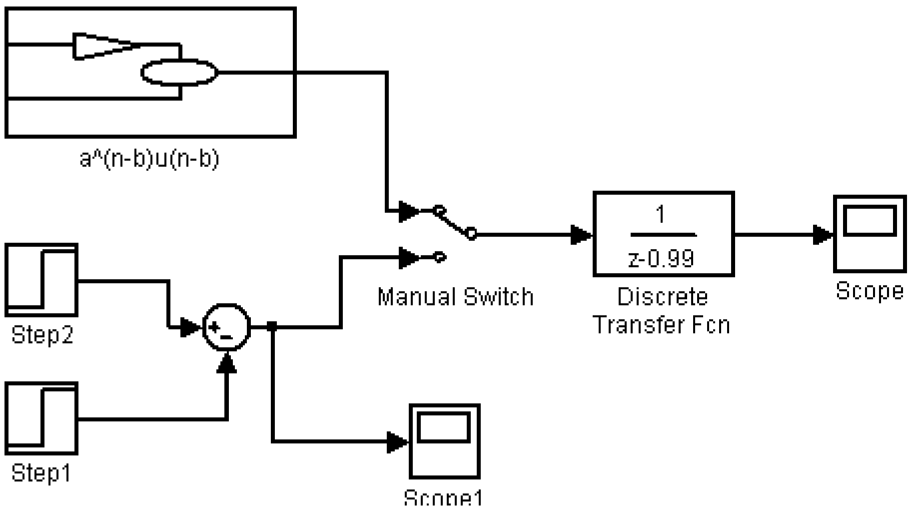
Μοντελοποίηση συστήματος διακριτού χρόνου στο περιβάλλον του Simulink

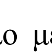
Για να ανοίξετε το αρχείο που έχετε κατεβάσει, μεταβείτε στον κατάλογο ο οποίος το περιέχει (μέσα από το Matlab) και στη συνέχεια δώστε το όνομά του (demo2) στη γραμμή εντολών. Τότε θα ανοίξει ένα παράθυρο με το ακόλουθο block διάγραμμα:



Εικόνα 1: Το αρχικό μοντέλο

Το μοντέλο αυτό περιγράφει την λειτουργία ενός συστήματος διακριτού χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από την ακολουθία:

$$x[n] = \alpha^{n-\beta} u[n-\beta], \quad n \in Z, \beta \in Z^{+}, \alpha \in R^{+}$$

Ξεκινάμε δίνοντας ορισμένες οδηγίες για την προσομοίωση μοντέλων στο περιβάλλον Simulink. Μόλις ανοίξουμε ένα μοντέλο μπορούμε να το προσομοιώσουμε (τρέξουμε) πατώντας στο κουμπί  της γραμμής εργαλείων ή εναλλακτικά επιλέγοντας Start από το menu Simulation. Για να δούμε το αποτέλεσμα σε ένα scope, κάνουμε διπλό κλικ πάνω του και επιλέγουμε το εικονίδιο  για την προσαρμογή των αξόνων στο κατάλληλο μέγεθος. Κάθε μοντέλο στο Simulink μπορεί να προσομοιώνεται για όσο χρόνο θέλουμε (ακόμα και για άπειρο) και για όποιο χρονικό διάστημα θέλουμε (ακόμα και για αρνητικούς χρόνους). Για να αλλάξουμε το χρονικό διάστημα προσομοίωσης, πηγαίνουμε στο menu Simulation, Simulation parameters και στην περιοχή Simulation Time της καρτέλας Solver δηλώνουμε τα παιδία Start και Stop Time. Αν θέλουμε να προσομοιώνεται το μοντέλο για άπειρο χρόνο δίνουμε στο πεδίο Stop Time την τιμή inf.

Στο αρχικό μοντέλο του παραπάνω σχήματος, παρουσιάζεται η επίδραση που έχει ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (Γ.Χ.Α.) σύστημα διακριτού χρόνου σε μια ακολουθία εισόδου. Η είσοδος του συστήματος μπορεί να είναι είτε η ακολουθία

$$x[n] = \alpha^{n-\beta} u[n-\beta], \quad n, \beta \in Z, \alpha \in R$$

είτε η κρουστική συνάρτηση διακριτού χρόνου

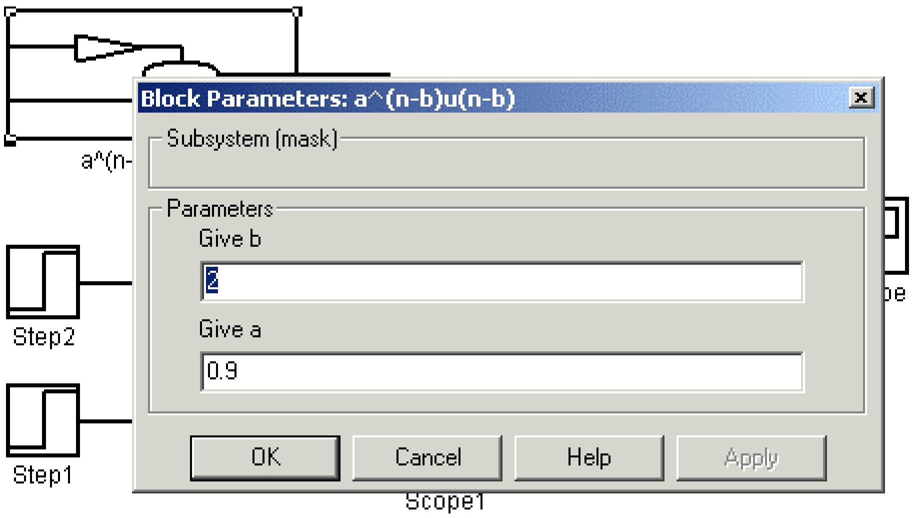
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

η οποία προκύπτει από τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση (step2) αν αφαιρέσουμε μια μετατοπισμένη κατά μια χρονική μονάδα μοναδιαία βηματική συνάρτηση (step1):

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε στο scope2 τόσο την κρουστική απόκριση του συστήματος (όταν επιλέγουμε ως είσοδο την κρουστική συνάρτηση) όσο και την απόκρισή του στην ακολουθία **x [n].** Μπορούμε να εναλλάσσουμε την είσοδο στο σύστημά μας κάνοντας διπλό κλικ στο block “manual switch”.

Μπορούμε να αλλάξουμε τις παραμέτρους **α** και **β** της ακολουθίας **x [n]** κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο block με label «a^(n-b)u(n-b)». Τότε εμφανίζεται ένα πλαίσιο διαλόγου όπως στο ακόλουθο σχήμα:



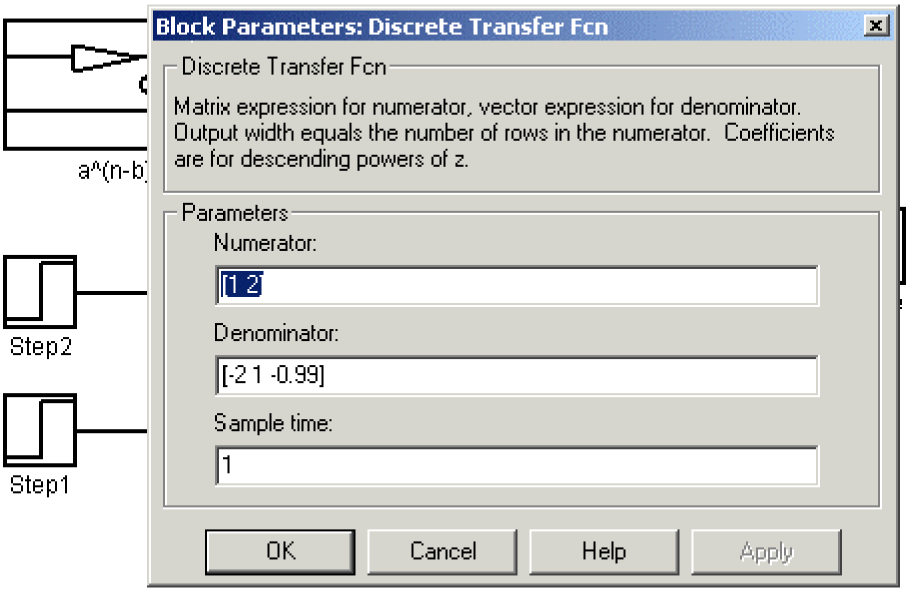
Εικόνα 2: Αλλαγή παραμέτρων του σήματος εισόδου

Η παράμετρος **β** καθορίζει τη χρονική μετατόπιση της ακολουθίας εισόδου και η παράμετρος **α** καθορίζει το αν έχουμε εκθετική μείωση ή εκθετική αύξηση καθώς και το ρυθμό αύξησης / μείωσης.

Μπορούμε ακόμα να αλλάξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του Γ.Χ.Α. συστήματος κάνοντας διπλό κλικ στο block με label «Discrete Transfer Fcn». Τότε εμφανίζεται ένα πλαίσιο διαλόγου το οποίο μας προτρέπει να συμπληρώσουμε δυο διανύσματα με συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Αν για παράδειγμα επιθυμούμε να δημιουργήσουμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z+2}{-2z^2 + z - 0.99}$$

Τότε θα πρέπει να συμπληρώσουμε τα πεδία του πλαισίου διαλόγου όπως στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3: Αλλαγή παραμέτρων του Γ.Χ.Α. συστήματος

Ως ένα παράδειγμα χρήσης του μοντέλου δοκιμάστε τα ακόλουθα:

1. Με διπλό κλικ στο block της εισόδου επιλέξτε **β=0** και **α=1.** Με τον τρόπο αυτό έχουμε επιλέξει ως είσοδο τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση.
2. Με διπλό κλικ στο σύστημα επιλέγουμε πολυώνυμο αριθμητή **[1]** και πολυώνυμο παρονομαστή **[1 -1]**. Με τον τρόπο αυτό το σύστημά μας είναι ένας ψηφιακός ολοκληρωτής.
3. Τοποθετούμε το Manual Switch στην κάτω θέση και τρέχουμε το μοντέλο. Παρατηρούμε πως η κρουστική απόκριση του ολοκληρωτή είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.
4. Τοποθετούμε το Manual Switch στην πάνω θέση και τρέχουμε το μοντέλο. Η έξοδος του συστήματός μας θα πρέπει να είναι η συνέλιξη της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης με τον εαυτό της (ίδια είσοδος και κρουστική απόκριση) δηλαδή η ακολουθία $y[n] = n \cdot u[n]$. Με διπλό κλικ στο Scope2 παρατηρούμε την ακολουθία εξόδου.

Α. Έλεγχος γραμμικότητας – χ. αμεταβλητότητας

- Πειραματιστείτε με διάφορα σήματα εισόδων και κρουστικών αποκρίσεων μεταβάλλοντας τις παραμέτρους των blocks. Συμφωνούν τα αποτελέσματα που λαμβάνετε με τις θεωρητικές συναρτήσεις που προκύπτουν από τη συνέλιξη εισόδου και κρουστικής απόκρισης;
- Ελέγξτε τη γραμμικότητα του συστήματος. Εφαρμόστε στην είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό σημάτων και εξετάστε κατά πόσο η έξοδος του συστήματος αποτελεί τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους σημάτων εισόδου. (Χρησιμοποιήστε τα blocks Sum και Gain από τη βιβλιοθήκη Math)
- Ελέγξτε τη χρονική αμεταβλητότητα του συστήματος: Τρέξτε αρχικά το μοντέλο και παρατηρήστε την έξοδο του συστήματος. Στη συνέχεια εφαρμόστε στην είσοδο μια καθυστερημένη εκδοχή της εισόδου χρησιμοποιώντας το Block «Unit Delay» της βιβλιοθήκης Discrete. Εξετάστε

κατά πόσο η νέα έξοδος αποτελεί μια καθυστερημένη εκδοχή της αρχικής εξόδου.

B. Έλεγχος ευστάθειας

Γενικά, τα συστήματα που σχεδιάζουμε θέλουμε να έχουν την ιδιότητα της ευστάθειας φραγμένης εισόδου – φραγμένης εξόδου (ΦΕΦΕ). Με την ιδιότητα αυτή εννοούμε πως οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο και αν εφαρμόσουμε στο σύστημά μας τότε αυτό θα αποκριθεί με μια φραγμένη έξοδο. Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές αν η κρουστική του απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

Στην περίπτωση όπου το σύστημά μας έχει συνάρτηση μεταφοράς η οποία είναι της μορφής

$$H(z) = \frac{1}{z-\alpha}$$

τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι της μορφής

$$h[n] = \alpha^n \cdot u[n]$$

η οποία είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο **α** και η οποία γνωρίζουμε πως είναι αθροίσιμη στην περίπτωση όπου **|α| < 1.** Επομένως το σύστημά μας θα είναι ευσταθές μόνο σε αυτή την περίπτωση ενώ σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα θα είναι ασταθές. Όταν η παράμετρος **α** είναι ένας μιγαδικός αριθμός θα πρέπει το μέτρο του να είναι μικρότερο της μονάδας ή ισοδύναμα να βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Γενικότερα, στην περίπτωση μιας συνάρτησης μεταφοράς ενός αιτιατού συστήματος της γενικής μορφής

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

αποδεικνύεται πως το αντίστοιχο σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές στην περίπτωση όπου οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή βρίσκονταί όλες εντός του μοναδιαίου κύκλου. (Αν διασπάσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα απλών κλασμάτων η απόδειξη προκύπτει άμεσα). Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται και πόλοι του συστήματος.

Για να πειραματιστείτε με θέματα ευστάθειας αντικαταστήστε το block «Discrete Transfer Fcn» με ένα block «Discrete Zero-Pole» από τη βιβλιοθήκη Discrete προκειμένου τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστή να εμφανίζονται παραγοντοποιημένα ως προς τις ρίζες τους. Σε ένα τέτοιο block οι παράμετροι αριθμητή και παρονομαστή είναι οι ρίζες των πολυωνύμων και αλλάζουν κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο block.

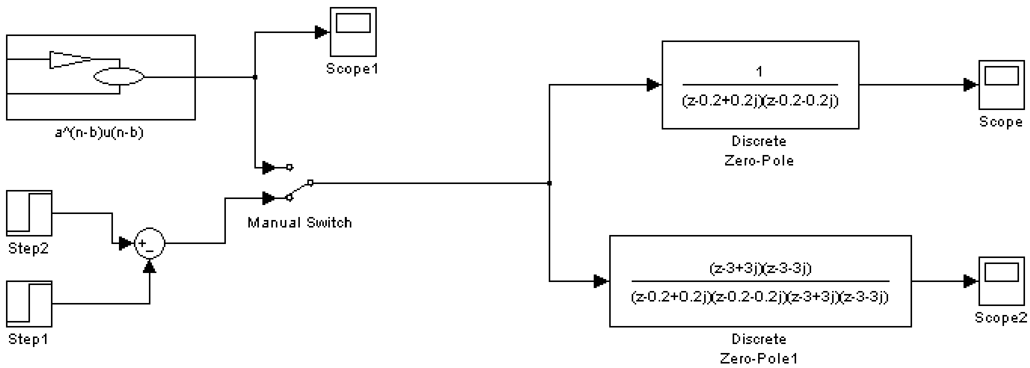
- Δημιουργήστε ένα σύστημα με 2 συζυγείς μιγαδικούς πόλους οι οποίοι να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και παρατηρήστε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Τι παρατηρείται για τη μορφή της κρουστικής απόκρισης; Τι μορφή έχει η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμόσουμε μια φραγμένη ακολουθία;

- Δημιουργήστε ένα σύστημα με 2 συζυγείς μιγαδικούς πόλους οι οποίοι να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Τι μορφή έχει αυτή τη φορά η κρουστική απόκριση του συστήματος;
- Εξετάστε τη μορφή που έχει η κρουστική απόκριση του συστήματος ως προς τη φάση των συζυγών πόλων. Πως επηρεάζει η φάση των πόλων την κρουστική απόκριση του συστήματος; Πως επηρεάζει η φάση των πόλων την απόκριση συχνοτήτων του συστήματος; (Για να δείτε την απόκριση συχνοτήτων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το block fft scope).

Γ. Ακύρωση πόλων – μηδενικών

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου ο μιγαδικός αριθμός **C** αποτελεί πόλο και μηδενικό της συνάρτησης μεταφοράς. Στην περίπτωση αυτή τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς θα περιέχουν έναν όρο της μορφής **(z - C)**. Το ερώτημα που τίθεται τότε είναι αν μπορούμε να διαγράψουμε τον όρο αυτό από αριθμητή και παρονομαστή και να οδηγηθούμε σε ένα απλούστερο σύστημα. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι τη διαγραφή μπορούμε να την κάνουμε μόνο στην περίπτωση όπου **|C|<1**.

Φορτώστε το αρχείο demo3.mdl



Εικόνα 4: Ακύρωση πόλων - μηδενικών

Στο παραπάνω σχήμα η είσοδος οδηγείται σε 2 συστήματα τα οποία διαφέρουν ως προς μια διαγραφή ενός κοινού πόλου – μηδενικού. Μάλιστα στην περίπτωσή μας είναι **|C|>1**.

- Τρέξτε το μοντέλο του αρχείου demo3.mdl. Τα δυο συστήματα έχουν την ίδια κρουστική απόκριση; Δίνουν την ίδια έξοδο;
- Στο block «Discrete Zero-Pole1» μετακινήστε τον κοινό πόλο και το κοινό μηδενικό από τη θέση (3+3j) εντός του μοναδιαίου κύκλου. (Μετακινούμε και το συζυγή πόλο – μηδενικό). Τι παρατηρείτε τώρα;

Δ. Παράλληλες και σε σειρά υλοποιήσεις

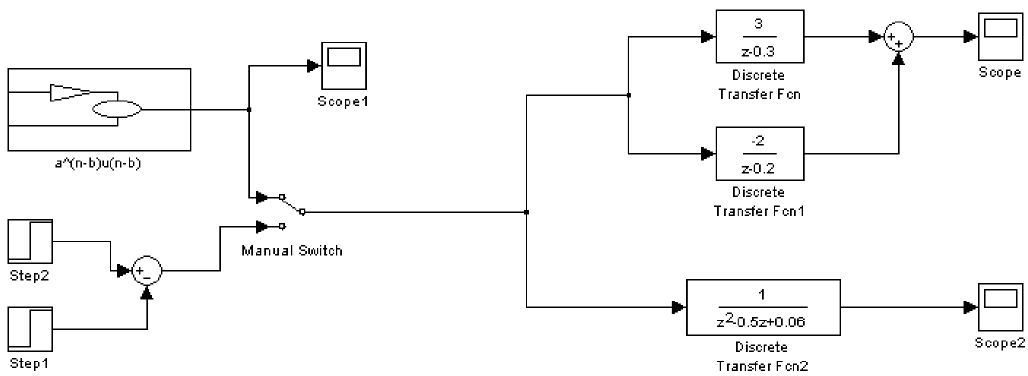
Έχουμε ήδη αναφέρει πως κάθε (αιτιατή) συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

μπορεί να γραφεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων. Για παράδειγμα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.06z^{-2}} = \frac{3}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{-2}{1 - 0.2z^{-1}}$$

Έτσι μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα γραμμικό σύστημα παράλληλα όπως στο επόμενο σχήμα:

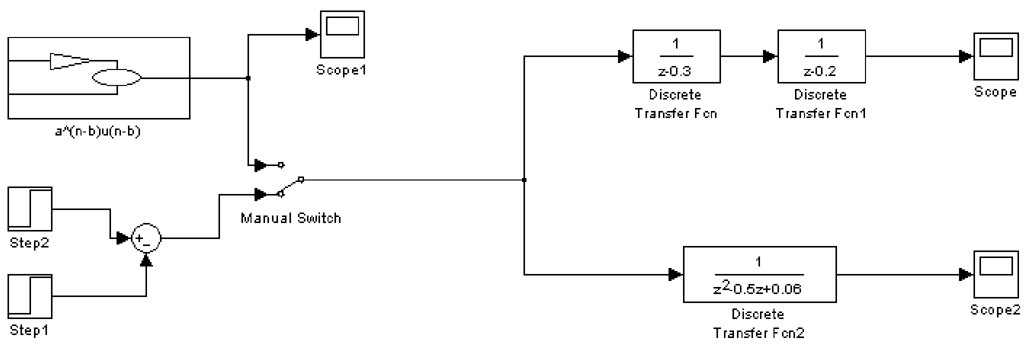


Εικόνα 5: Παράλληλη υλοποίηση συστήματος

Ακόμα, αν μπορέσουμε και γράψουμε μια συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο από απλούστερες συναρτήσεις μεταφοράς τότε μπορούμε να την υλοποιήσουμε σε σειρά. Για παράδειγμα η συνάρτηση που είδαμε στα παραπάνω γράφεται:

$$\frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.06z^{-2}} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}}$$

και έτσι μπορούμε να την υλοποιήσουμε όπως στο ακόλουθο σχήμα:



Εικόνα 6: Σε σειρά υλοποίηση συστήματος

- Να υλοποιήσετε σε σειρά και παράλληλα την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς (Το περιβάλλον Matlab προσφέρει τη συνάρτηση residuez η οποία εκτελεί τη διάσπαση σε απλά κλάσματα) και να επιβεβαιώσετε πως λαμβάνετε την ίδια απόκριση.

$$\frac{1}{1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2}}$$

- Για ποιο λόγο είναι επιθυμητή η υλοποίηση μιας συνάρτησης μεταφοράς σε σειρά ή παράλληλα;
- Εξετάστε την περίπτωση όπου δύο αντίστροφα και ευσταθή συστήματα συνδέονται σε σειρά. (Το ένα μπορεί να είναι FIR σύστημα). Τι παρατηρείτε στην έξοδο της συνδεσμολογίας αυτής; Συμβαίνει το ίδιο και στην περίπτωση όπου κάποιο από τα επιμέρους συστήματα είναι ασταθές; Το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές η όχι;