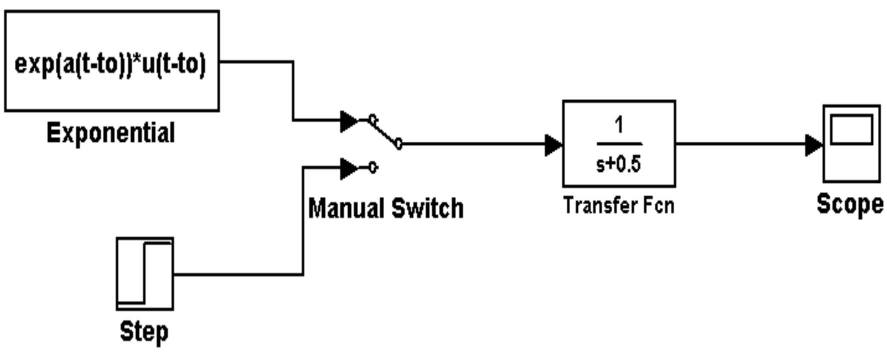
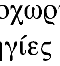
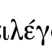
Μοντελοποίηση συστήματος συνεχούς χρόνου στο περιβάλλον του Simulink

1.1 Συνέλιξη

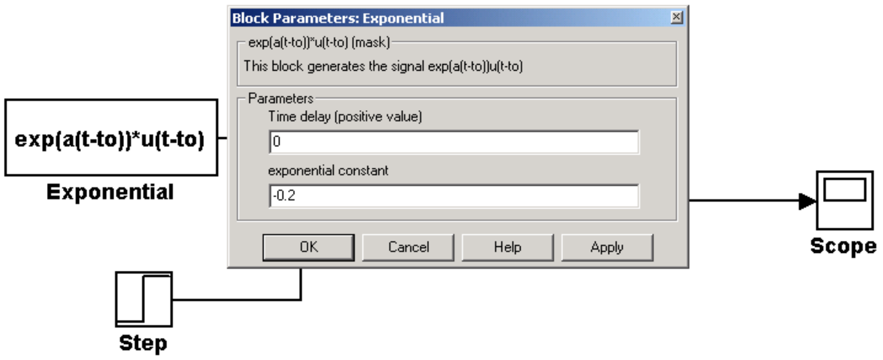
Για να ανοίξετε το μοντέλο που έχετε κατεβάσει, δηλώστε στη Matlab το path στο οποίο έχετε αποθηκεύσει το .mdl αρχείο. Στη συνέχεια δώστε το ονομά του αρχείου στη γραμμή εντολών και θα ανοίξει το παράθυρου με το block διάγραμμα του παρακάτω σχήματος



Το αρχικό μοντέλο που δίνεται, απλώς δείχνει τη συνέλιξη δύο σημάτων και στη συνέχεια με τις κατάλληλες οδηγίες επιτρέπει στον αναγνώστη να πειραματιστεί μόνος του. Πριν προχωρήσουμε στον πειραματισμό πάνω σε συστήματα συνεχούς χρόνου, δίνουμε κάποιες βασικές οδηγίες για την προσομοίωση στο simulink.

Καταρχάς, για να προσομοιωθεί (τρέξει) κάποιο μοντέλο επιλέγουμε το εικονίδιο  ή εναλλάκτικά από το menu *Simulation* επιλέγουμε *Start*. Για να δούμε το αποτέλεσμα σε ένα scope, κάνουμε διπλό κλικ πάνω στο scope και επιλέγουμε το εικονίδιο  για την προσαρμογή των αξόνων στο κατάλληλο μέγεθος. Κάθε μοντέλο στο Simulink μπορεί να προσομοιώνεται για όσο χρόνο θέλουμε (ακόμα και για άπειρο) και για όποιο χρονικό διάστημα θέλουμε (ακόμα και για αρνητικούς χρόνους). Για να δηλώσουμε-αλλάξουμε το χρονικό αυτό διάστημα, πηγαίνουμε στο menu *Simulation-Simulation parameters* και στην περιοχή *Simulation Time* της καρτέλας *Solver* δηλώνουμε τα πεδία *Start Time* και *Stop Time*. Αν θέλουμε να προσομοιώνεται το μοντέλο για άπειρο χρόνο δηλώνουμε στο πεδίο *Stop Time* την τιμή inf.

Στο αρχικό block διάγραμμα φαίνεται η συνέλιξη του σήματος εισόδου και του συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-0.5t}u(t)$. Η είσοδος του συστήματος μπορεί να είναι είτε η βηματική συνάρτηση $u(t)$, είτε η εκθετική συνάρτηση $e^{\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$ και οι οποίες μπορούν να εναλλάσσονται με διπλό κλικ στο block *Manual Switch*. Στην περίπτωση που επιλέγουμε για είσοδο την εκθετική συνάρτηση, μπορούμε με διπλό κλικ στο block *Exponential* να αλλάξουμε την εκθετική σταθερά α καθώς και τη μετατόπιση-καθυστέρηση t_0 στο χρόνο, όπως φαίνεται και στο σχήμα

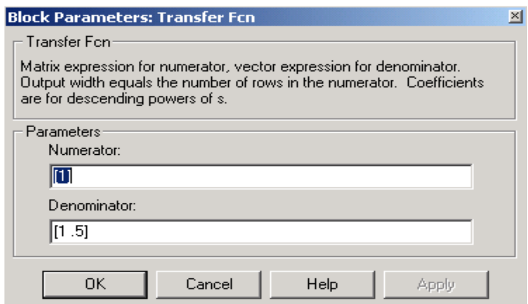


Η αρχική τιμή της καθυστέρησης t_0 επιλέγεται ίση με μηδέν (αγνοήστε τυχόν Warnings που εμφανίζονται στο Command Window της Matlab).

Η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος εκφράζεται μέσω του μετασχηματισμού Laplace. Σαν αρχική τιμή της εκθετικής σταθεράς της κρουστικής απόκρισης έχουμε επιλέξει την τιμή -0.5, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace θα δίνεται από τη σχέση

$$H(s) = \frac{1}{s + 0.5}$$

Στο block *Transfer Fcn* μπορούμε με διπλό κλικ να αλλάξουμε την εκθετική σταθερά και γενικότερα τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το παράθυρο διαλόγου που ανοίγει με την συγκεκριμένη ενέργεια.



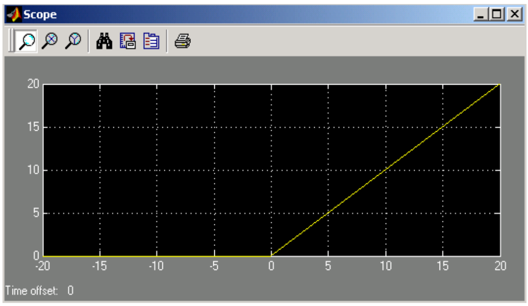
Στο πεδίο *Numerator* ορίζουμε τον αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς, ενώ στο πεδίο *Denominator* τον παρονομαστή. Και στις δύο περιπτώσεις, δηλώνουμε του συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή. Για παράδειγμα, αν ο αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς είναι ο $s^2 + 3s - 2$, τότε στο πεδίο *Numerator* δίνουμε τους συντελεστές σε μορφή διανύσματος, δηλαδή $[1 \;\; 3 \;\; -2]$. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, αν θέλουμε να αλλάξουμε την εκθετική σταθερά της κρουστικής συνάρτησης του συστήματος, μπορούμε μέσω του μετασχηματισμού Laplace και του ζεύγους

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s + a}$$

να αλλάξουμε τον παρονομαστή στο παραπάνω παράθυρο διαλόγου. Για παράδειγμα, αν θέλουμε το ΓΧΑ σύστημα να έχει κρουστική απόκριση $e^{-0.1t}u(t)$, τότε το διάνυσμα των συντελεστών του παρονομαστή τίθεται ίσο με $[1 \ \ 0.1]$. Στην περίπτωση που επιλέξουμε για τον παρονομαστή το διάνυσμα συντελεστών $[1 \ \ 0]$ τότε το σύστημα θα αποτελεί έναν ιδανικό ολοκληρωτή με $h(t) = u(t)$ και

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Όταν τόσο η είσοδος στο σύστημα όσο και η κρουστική απόκριση είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$, τότε το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι αυτό που φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Εκτελέστε τα παραπάνω και επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα. Η συνέλιξη της $u(t)$ με τον εαυτό της μας δίνει τη συνάρτηση $tu(t)$. Συνεπώς αν δημιουργήσετε τη συνάρτηση αυτή, θα πρέπει να λαμβάνετε το ίδιο αποτέλεσμα. Για να δημιουργήσετε το σήμα $tu(t)$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα blocks *Step* και *Clock* (το *Clock* σας δίνει στην έξοδο το χρόνο t) από τον κατάλογο της βιβλιοθήκης *Simulink-Sources* και σε συνδυασμό με το block *Dot Product* από τη βιβλιοθήκη *Math* να λάβετε το γινόμενο $tu(t)$. Παρατηρήστε το σήμα $tu(t)$ στέλνοντάς το σε ένα *scope*. (Στη βηματική συνάρτηση μπορείτε με διπλό κλικ στο block της, να αλλάξετε τη χρονική στιγμή του βήματος. Για να έχετε την $u(t)$ στην έξοδο, πρέπει το *step-time* να οριστεί ίσο με μηδεν. Στην περίπτωση που θέλετε το σήμα $u(t - t_0)$, προφανώς ορίζετε το *step-time* ίσο με t_0. Στην εκθετική συνάρτηση μπορείτε επίσης να αλλάξετε την τιμή του t_0 και να πάρετε το μετατοπισμένο σήμα $e^{\alpha(t-t_0)}u(t - t_0)$ με $t_0 > 0$).

- Πειραματιστείτε με διάφορα σήματα και συνδυασμούς εκθετικών- βηματικών συναρτήσεων. Συμφωνούν τα αποτελέσματα που λαμβάνετε με τις συναρτήσεις που παίρνετε, αν υπολογίσετε μαθηματικά τη συνέλιξη των σημάτων;

- Ελέγξτε τη γραμμικότητα του συστήματος (Για να εφαρμόσετε στην είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό σημάτων χρησιμοποιείστε από τη βιβλιοθήκη *Math*, τα blocks *Sum* και *Gain*.)

- Ελέγξτε τη χρονική αμεταβλητότητα του συστήματος (Για να καθυστερήσετε ένα σήμα κατά n χρονικές μονάδες, μπορείτε γενικά να χρησιμοποιήσετε το block *Transport Delay* από τον κατάλογο *Continuous* και να δηλώσετε στο πεδίο *Time Delay* την τιμή n. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η κρουστική απόκριση εκφράζεται μέσω του μετασχηματισμού Laplace, δεν μπορούμε να καθυστερήσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος.)

- Αν έχουμε στην είσοδο το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$ και η κρουστική απόκριση είναι η $h(t) = e^{\beta t}u(t)$, εξετάστε τις περιπτώσεις όπου $\alpha = \beta$ και $\alpha \neq \beta$. Συμφωνεί το θεωρητικό με το πειραματικό αποτέλεσμα;

1.2 Ευστάθεια Συστημάτων

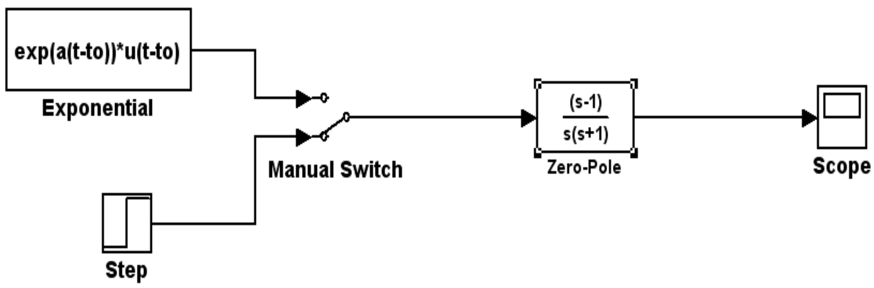
Έιναι προφανές ότι τόσο η βηματική, όσο και η εκθετική συνάρτηση με $\alpha < 0$, είναι φραγμένες συναρτήσεις (φραγμένη είσοδος-bounded input). Στην περίπτωση που σκοπός μας είναι να έχουμε ένα κατά ΦΕΦΕ (φραγμένη είσοδος-φραγμένη έξοδος) ευσταθές σύστημα, μπορούμε να επιλέξουμε την κατάλληλη κρουστική απόκριση. Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα είναι κατά ΦΕΦΕ ευσταθές, όταν η κρουστική του συνάρτηση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Όταν η εκθετική σταθερά της συνάρτησης $h(t)$ είναι αρνητική, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid h(t) \mid dt \tag{1.1}$$

συγκλίνει και η $h(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Στην περίπτωση που επιλέξουμε θετική εκθετική σταθερά, τότε προφανώς το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει και η έξοδος του συστήματος θα απειρίζεται. Μια τέτοια επιλογή, μεταφράζεται στο πεδίο του Laplace ως εξής

$$H(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \alpha > 0$$

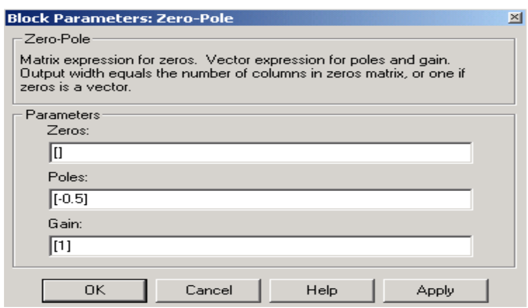
Ισοδύναμα δηλαδή, μπορούμε να ελέγξουμε τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς και να δούμε για ποιες τιμές του s μηδενίζεται. (Τα σημεία αυτά ονομάζονται πόλοι του συστήματος). Αφού η σταθερά α είναι πραγματικός αριθμός, τότε η πραγματική τιμή $s = \alpha > 0$ είναι ο πόλος του συστήματος. Αντίστοιχα, αν η εκθετική σταθερά της $h(t)$ είναι αρνητική, τότε ο πόλος του συστήματος θα είναι η αρνητική πραγματική τιμή $s = \alpha < 0$. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι αλλάζοντας τον πόλο της συνάρτησης μεταφοράς, επηρεάζουμε την ευστάθεια του συστηματός. Όλα τα παραπάνω συνάδουν με το γεγονός ότι για να είναι ένα σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ πρέπει οι πόλοι του να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Για να πειραματιστείτε σχετικά την επιρροή της θέσης των πόλων στην ευστάθεια των συστημάτων χρησιμοποιείστε το block *Zero-Pole* της βιβλιοθήκης *Continuous* αντί για το block *Transfer Fcn* όπως στο επόμενο σχήμα.



Στο block αυτό μπορούμε να ορίσουμε τα μηδενικά και τους πόλους του συστήματος αντί για τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστη. Για παράδειγμα αν το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι το $s^2 - s + 2 = (s-2)(s+1)$, του οποίου οι ρίζες είναι τα $2, \ -1$, τότε στο πεδίο *Poles* δηλώνουμε το διάνυσμα $[2, \ -1]$. Με την ίδια λογική δηλώνουμε και τα μηδενικά-ρίζες του αριθμητή. Στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μονάδα, τότε ως διάνυσμα μηδενικών δηλώνουμε το κενό διάνυσμα []. Αν θέλουμε να έχουμε το αρχικό σύστημα με

$$H(s) = \frac{1}{s+0.5}$$

τότε οι επιλογές θα είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα



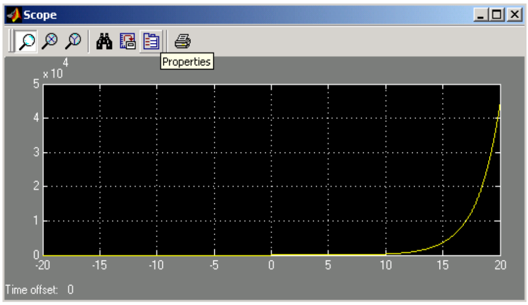
Στο πεδίο *Gain* μπορούμε να εισάγουμε κάποιο συντελεστή ενίσχυσης αν θέλουμε. Αν στο παραπάνω θέσουμε το *Gain* ίσο με k, τότε η συνάρτηση μεταφοράς θα γίνει

$$H(s) = \frac{k}{s + 0.5}$$

Αν στη συγκεκριμένη συνάρτηση, δηλώσουμε στο διάνυσμα των πόλων κάποια θετική τιμή, τότε εμμέσως επιλέγουμε θετική εκθετική σταθερά στην κρουστική απόκριση και αναμένουμε το σύστημα να είναι ασταθές. Το παρακάτω scope είναι η έξοδος του συστήματος με

$$H(s) = \frac{1}{s - 0.5}$$

όταν στην είσοδο εφαρμόσουμε τη βηματική συνάρτηση.



- Επιβεβαιώστε τα παραπάνω αποτελέσματα και πειραματιστείτε με την θέση και την τιμή των πόλων, δημιουργώντας υψηλότερης τάξης συστήματα.

- Εξετάστε την βηματική απόκριση-έξοδος συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμόζεται η βηματική συνάρτηση-στην περίπτωση όπου έχετε δύο φανταστικούς συζυγείς πόλους και κανένα μηδενικό. Τι είδους σήμα παρατηρείτε στην έξοδο και γιατί; Πως επηρεάζει το φανταστικό μέρος των πόλων την έξοδό του συστήματος; Αν είχατε στην διάθεσή σας έναν ιδανικό αναλογικό ολοκληρωτή ($h(t) = u(t)$), ποιο σήμα θα οδηγούσατε στην είσοδό του, ώστε να πάρετε την ίδια έξοδο;

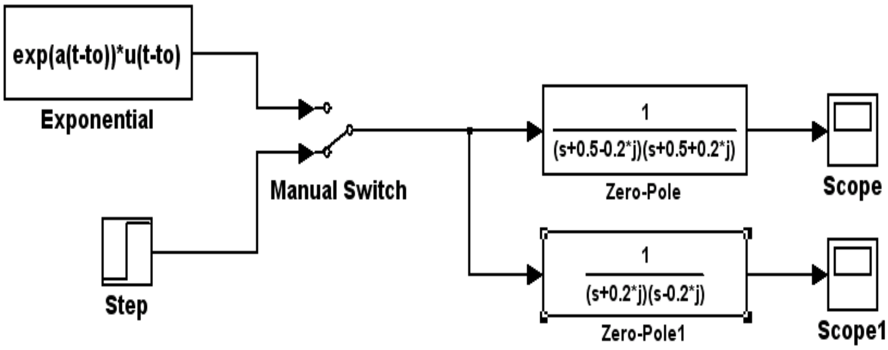
- Αν στους πόλους προσθέσετε και αρνητικό πραγματικό μέρος πως επηρεάζεται η έξοδος του συστήματος; Ποια η διαφορά με την προηγούμενη έξοδο; Σε ποια ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace αντιστοιχεί η προσθήκη αυτή;

- Πως επηρεάζεται η έξοδος ενός συστήματος όταν αυξάνεται η πολλαπλότητα ενός πόλου;

- Πως επηρεάζεται η έξοδος ενός συστήματος, όταν το πραγματικό μέρος των πόλων τείνει στο μηδεν;

1.3 Ανάλυση συστήματος σε μικρότερης τάξης υποσυστήματα

Για να ελέγχετε εύκολα τις διαφορές των παραπάνω περιπτώσεων οδηγήστε το ίδιο σήμα σε περισσότερα συστήματα ταυτόχρονα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



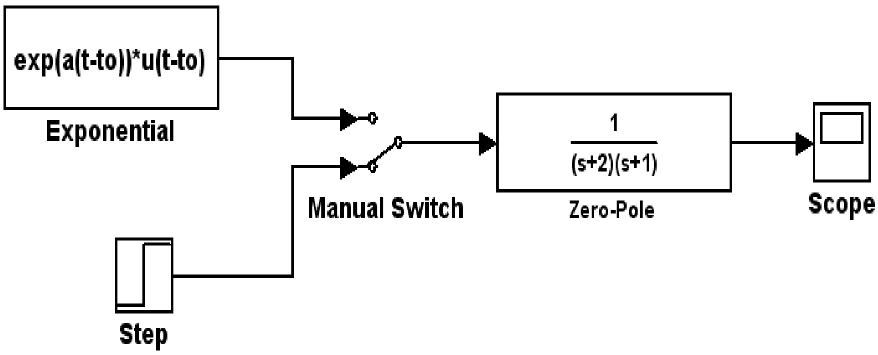
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος με συνάρτηση μεραφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

όταν στην είσοδο οδηγήσουμε ένα φραγμένο σήμα. Αν παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή, τότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

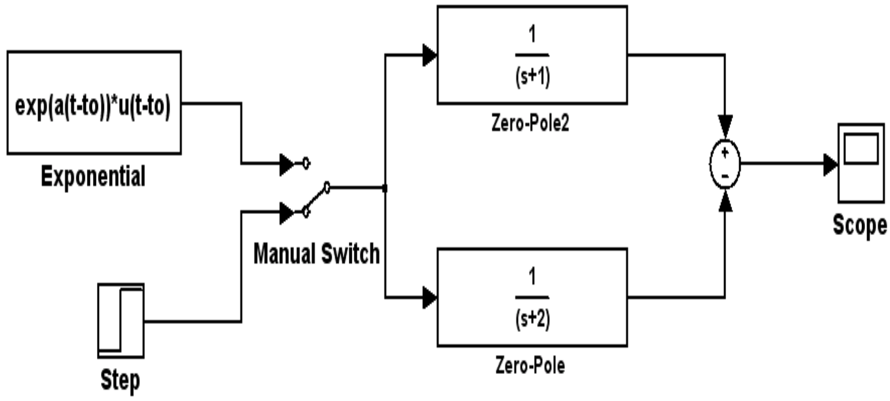
Συνεπώς, για να δούμε έστω τη βηματική απόκριση αυτού του συστήματος, ορίζουμε καταλλήλως τα πεδία του *Zero-Pole* block, οπότε έχουμε το μοντέλο του επόμενου σχήματος



Αν μας ζητούσαν να υλοποιήσουμε το παραπάνω σύστημα με συστήματα πρώτης τάξης, η μας ζητούσαν να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος, τότε θα πρωχωρούσαμε στην γνωστή ανάλυση σε απλά κλάσματα. Σύμφωνα με αυτό, θα έχουμε την ίδια έξοδο αν υπολογίσουμε τις βηματικές αποκρίσεις των συστημάτων

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \text{ και } H_2(s) = \frac{1}{s+2} \tag{1.2}$$

και από την πρώτη έξοδο αφαιρέσουμε τη δεύτερη. Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε το συνολικό σύστημα (παράλληλη σύνδεση).



- Δημιουργήστε τα παραπάνω μοντέλα και ελέγξτε αν στην έξοδο παίρνετε το ίδιο σήμα
- Αν σας ζητηθεί να πάρετε την ίδια έξοδο χρησιμοποιώντας δύο σε σειρά συστήματα (σύνδεση σε σειρά), ποια θα ήταν αυτά;
- Χρησιμοποιείστε δύο ευσταθή, αντίστροφα μεταξύ τους, συστήματα σε σειρά. Τι παρατηρείτε στην έξοδο, όταν στην είσοδο εφαρμόσετε ένα ημιτονικό σήμα; (για ημιτονικό σήμα χρησιμοποιήστε το block *Sine Wave* από τη βιβλιοθήκη *Sources*)
- Αν το ένα απο τα δύο συστήματα είναι ασταθές, τι σήμα εμφανίζεται στην έξοδο; Άρει το ευσταθές σύστημα την αστάθεια του άλλου;

Θεωρούμε ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2-1}$$

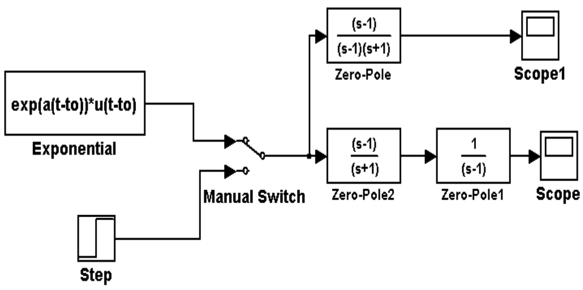
το οποίο με απλοποίηση γίνεται

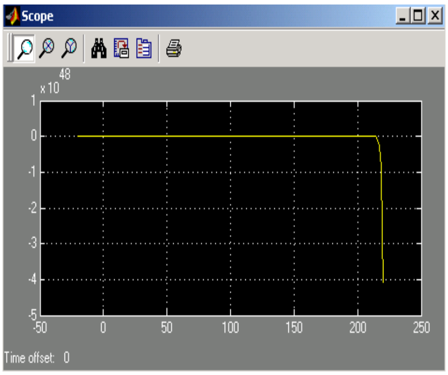
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

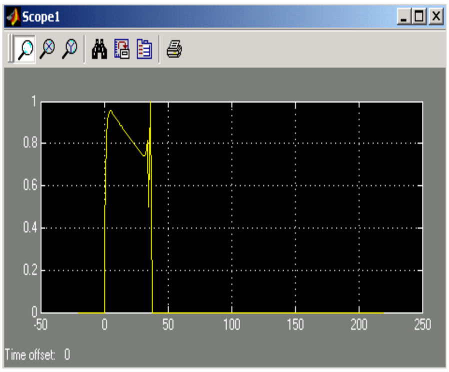
και το οποίο αναμένεται να είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ λόγω ακύρωσης κοινού πόλου-μηδενικού (zero-pole cancellation). Δημιουργούμε τη σύνδεση σε σειρά των συστημάτων

$$H_1(s) = \frac{1}{s-1} \text{ και } H_2(s) = \frac{s-1}{s+1} \tag{1.3}$$

όπως δείχνει το παρακάτω μοντέλο και καταγράφουμε την έξοδο του συστήματος, όταν στην είσοδο έχουμε το σήμα $e^{-0.01t}u(t)$. Όπως παρατηρείτε, είτε η έξοδος απειρίζεται, είτε το σύστημα δεν μπορεί να δώσει αποτέλεσμα και δίνει μηδενικό σήμα. Την πρώτη περίπτωση την καταγράφουμε στη σύνδεση σε σειρά (scope), ενώ τη δεύτερη όταν έχουμε το συνολικό μη απλοποιημένο σύστημα (scope1)







Σημειώστε ότι, αν επιλέξετε ένα σήμα που, είτε είναι σταθερό, είτε φτάνει γρήγορα σε σταθερή κατάσταση (π.χ. μεγάλη εκθετική σταθερά), ίσως να μην παρατηρήσετε πρόβλημα στην έξοδο και να μη κάνετε αντικειμενικές παρατηρήσεις.

- Πειραματιστείτε με τέτοιες συνδεσμολογίες και διάφορες εισόδους και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.
- Αν αλλάξετε τη σειρά των συστημάτων παίρνετε το ίδιο αποτέλεσμα;
- Πως επηρεάζει το μέτρο του κοινού πόλου-μηδενικού την έξοδο, όσο αυτό τείνει στο μηδέν; Τι γίνεται στην οριακή περίπτωση που είναι ίσος με το μηδέν;

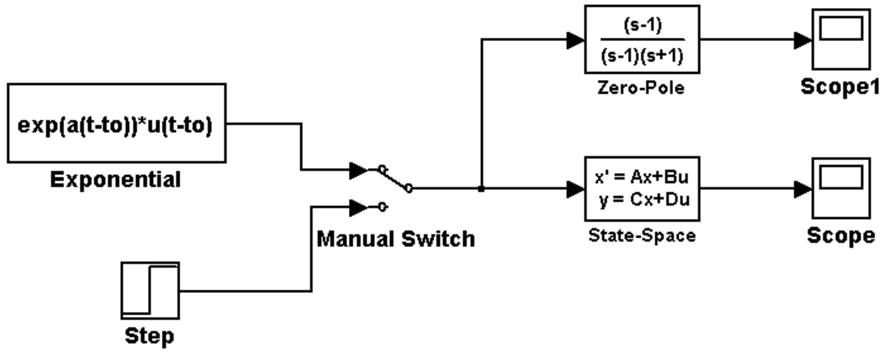
1.4 Χώρος Κατάστασης

Για να δικαιολογήσουμε την απόκλιση της εξόδου, θα πρέπει να καταφύγουμε στη μελέτη του χώρου κατάστασης του συστήματος. Χρησιμοποιώντας το block *State-Space* από τη βιβλιοθήκη *Continuous* μπορούμε ένα σύστημα να το δηλώσουμε μέσω των παραμέτρων $A,\ B,\ C,\ D$ και της αρχικής του κατάστασης. Για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους αυτές ενός συστήματος, του οποίου γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, χρησιμοποιούμε την εντολή $tf2ss$ της Matlab, όπου στην είσοδο δίνουμε τα διανύσματα με τους συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή και στην έξοδο δίνουμε τα ορίσματα $A,\ B,\ C,\ D$. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, το διάνυσμα του αριθμητή $(s-1)$ είναι το $[1\ \ -1]$ ενώ το διάνυσμα του παρονομαστή (s^2-1) είναι το $[1\ \ 0\ -1]$. Λαμβάνοντας τις παραμέτρους, μπορούμε το σύστημα να το εκφράσουμε μέσω των καταστατικών εξισώσεων ως εξής

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

όπου $v(t)$ η είσοδος στο σύστημα, $y(t)$ η έξοδος και $\underline{x}(t)$ το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος. Αν υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A, παίρνουμε ότι $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Η θετική ιδιοτιμή δημιουργεί την ιδιοσυνάρτηση e^t, η οποία μέσω του μητρώου e^{At}, επηρεάζει την έξοδο του συστήματος και προκαλεί την απόκλιση της εξόδου. Αν χρησιμοποιήσουμε το block State-Space, τότε αντικαθιστώντας τα διανύσματα και τον πίνακα και θέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, παίρνουμε την ίδια έξοδο. Το αντίστοιχο μοντέλο φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



- Πειραματιστείτε με συνδεσμολογίες συστημάτων χρησιμοποιώντας State-Space blocks. Δηλώστε ως *Start Time* στο *Simulation parameters* την τιμή 0 και παρατηρήστε πώς επηρεάζουν οι αρχικές συνθήκες την έξοδο του συστήματος.

- Ποια σχέση έχουν οι πόλοι ενός συστήματος με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα κατάστασης ;