Λύσεις 1ου Σετ ασκήσεων

1.1

Σχεδιάστε τις παρακάτω συναρτήσεις

$\alpha)$ $e^{-2t}u(t-1)$

$\beta)$ $u(t^2-9)$

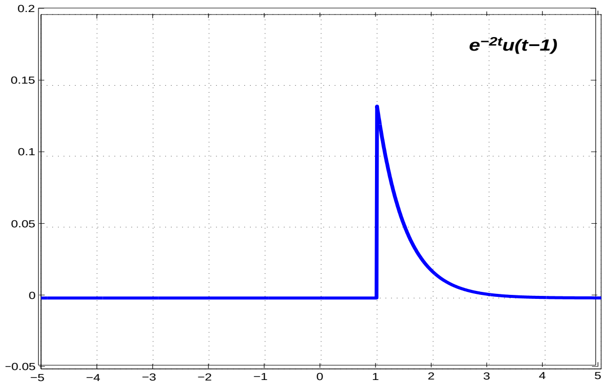
$\gamma)$ $\prod(\frac{t-2}{5})$, όπου $\prod(t) = \begin{cases} 1 & \mid t \mid \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού

$\delta)$ $\prod(\frac{t+1}{2}) + \prod(t-\frac{1}{2})$

Λύση

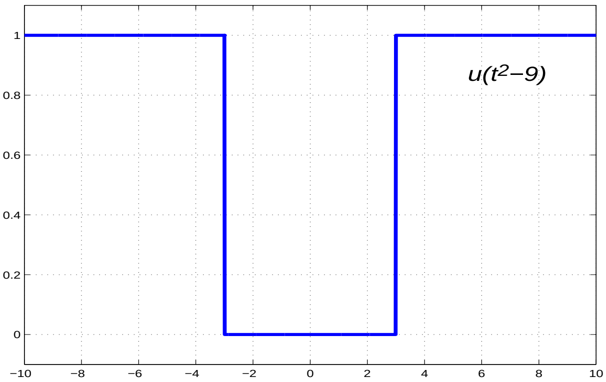
$\alpha)$ $e^{-2t}u(t-1)$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί γινόμενο μια εκθετικής συνάρτησης και μιας μετατοπισμένης έκδοσης της βηματικής συνάρτησης. Προφανώς η τιμή της συνάρτηση θα είναι μηδεν για $t < 1$. Με τη βοήθεια της Matlab παίρνουμε την γραφική παράσταση.



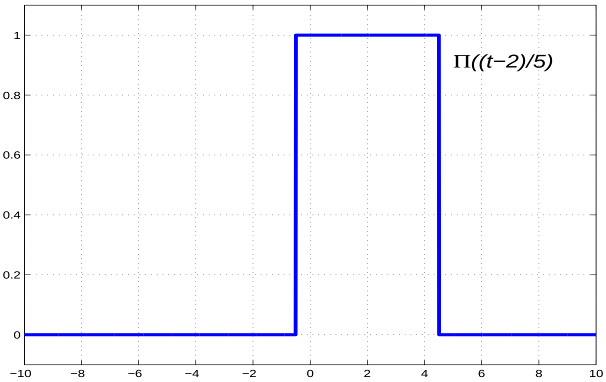
$\beta)$ $u(t^2-9)$

Η συνάρτηση αυτή είναι ίση με 1 όταν $t^2 \geq 9$, δηλαδή όταν $|t| \geq 3$, ενώ στο διάστημα $(-3, 3)$ έχει μηδενική τιμή. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



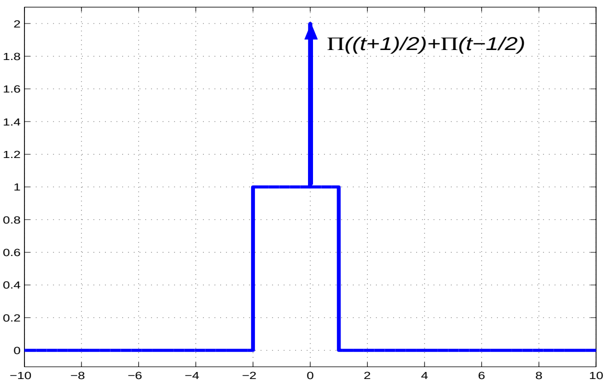
$\gamma)$ $\prod(\frac{t-2}{5})$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι μια μετατόπιση μιας επέκτασης του μοναδιαίου παλμού. Συγκεκριμένα ο παλμός μετατοπίζεται κατά δύο μονάδες δεξιά και στη συνέχεια το εύρος του αυξάνεται από 1 σε 5 λόγω του παράγοντα $1/5$. Συνεπώς όσο το t κινείται στο $[-0.5, 0.5]$ ο παράγοντας $\frac{t-2}{5}$ θα κινείται στο $[-0.5, 4.5]$. Η γραφική παράσταση της συνάρτηση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



$\delta)$ $\prod(\frac{t+1}{2}) + \prod(t - \frac{1}{2})$

Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως και πριν. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι (για $t = 0$) στη συνάρτηση συνεισφέρουν "θετικα" και οι δύο όροι όποτε στιγμιαία η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η εξής



1.2

Καθορίστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και αν είναι, υπολογίστε την περίοδο τους

$\alpha)$ $e^{j\pi t-1}$

$\beta)$ $sin(t) + cos(\sqrt{2}t)$

$\gamma)$ $2cos(120\pi t + \pi/3) + 6cos(377t)$

$\delta)$ $cos^2(2t - \frac{\pi}{3})$

Λύση:

$\alpha)$ $e^{j\pi t-1}$

Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T, αρκεί να δείξουμε ότι $x(t+T) = x(t)$. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $e^{2j\pi} = 1$ οπότε παρατηρούμε ότι

$$e^{j\pi t-1} = e^{2j\pi}e^{j\pi t-1} = e^{j\pi(t+2)-1}.$$

Επομένως η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 2$.

$\beta)$ $sin(t) + cos(\sqrt{2}t)$

Οι επιμέρους συναρτήσεις $sin(t)$ και $cos(\sqrt{2}t)$ είναι περιοδικες με περίοδο 2π και $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ αντίστοιχα. Για να είναι όμως το αθροισμά τους περιοδική συνάρτηση, θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι λόγος δύο ακεραίων, πράγμα αδύνατο αφού το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. ’Αρα η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

$\gamma)$ $sin(120\pi t + \pi/3) + 6cos(377t)$

Εργαζόμαστε όπως και πριν και παρατηρούμε ότι ο λόγος T_{sin}/T_{cos} δεν μπορεί να γραφεί σαν λόγος ακεραίων αφού στο T_{cos} εμφανίζεται το π που είναι άρρητος αριθμός, ενώ στο T_{sin} όχι ($T_{sin} = 1/60, \quad T_{cos} = 2\pi/377$).

$\delta)$ $cos^2(2t - \frac{\pi}{3})$

Από γνωστή τριγονωμετρική ταυτότητα έχουμε ότι

$$cos^2(2t - \frac{\pi}{3}) = \frac{1 + cos(4t - \frac{2\pi}{3})}{2}$$

Επομένως, η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

1.3

Υπολογίστε την βασική περίοδο των παρακάτω περιοδικών σημάτων

$\alpha)$ $x(t) = cos(5\pi t) + sin(12\pi t)$

$\beta)$ $x(t) = cos(4\pi t)sin(3\pi t)$

Λύση:

$\alpha)$ $x(t) = cos(5\pi t) + sin(12\pi t)$

Για να είναι η παραπάνω συνάρτηση περιοδική, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$x(t+T) = cos(5\pi t + 5\pi T) + sin(12\pi t + 12\pi T) = x(t)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με το να υπάρχουν ακέραιοι κ, μ έτσι ώστε

$$5\pi T = 2\pi\kappa, \quad 12\pi T = 2\pi\mu$$

Δηλαδή, πρέπει να βρούμε δύο ακεραίους κ, μ, για τους οποίους να ισχύει

$$T = \frac{2}{5}\kappa = \frac{1}{6}\mu \Rightarrow \frac{\mu}{\kappa} = \frac{12}{5}$$

Επιλέγοντας $\mu = 12, \ \kappa = 5$, αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους (δεν έχουν κοινό διαιρέτη), παίρνουμε τη βασική περίοδο του σήματος, η οποία απο τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι είναι η $T = 2$

$\beta)$ $x(t) = cos(4\pi t)sin(3\pi t)$

Ομοίως και σε αυτή την περίπτωση, για να υπολογίσουμ την βασική περίοδο του σήματος, θα πρέπει να βρούμε δύο ακεραίους $\lambda, \ \rho$ για τους οποίους θα ισχύει

$$3\pi T = 2\pi\lambda, \quad 4\pi T = 2\pi\rho$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε την αναλογία

$$T = \frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{2}\rho \Rightarrow \frac{\rho}{\lambda} = \frac{4}{3}$$

Εφόσον αριθμητής και παρονομαστής είναι πρώτοι μεταξύ τους, η βασική περίοδο θα δίνεται για $\rho = 4, \ \lambda = 3$, οπότε $T = 2$.

1.4

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$\alpha)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta(t-2) dt$

$\beta)$ $\displaystyle\int_{0}^{5} cos(2\pi t)\delta(t - 1/2) dt$

$\gamma)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \dot{\delta}(t-2) dt$

$\delta)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-5t} + sin(10\pi t))\dot{\delta}(t)$

Λύση:

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με βάση τις ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης

$\alpha)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta(t-2) dt = (t-2)^2 \Big|_{t=2} = 0$

$\beta)$ $\displaystyle\int_{0}^{5} cos(2\pi t)\delta(t - \frac{1}{2}) dt = cos(2\pi t) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = -1$

$\gamma)$ $\int_{-\infty}^{\infty} t^2\dot{\delta}(t-2)dt = (-1)^1 \frac{d(t^2)}{dt}\Big|_{t=2} = -2t\Big|_{t=2} = -4$

$\delta)$ $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-5t} + sin(10\pi t))\dot{\delta}(t) = -\frac{d(e^{-5t} + sin(10\pi t))}{dt}\Big|_{t=0} = 5e^{-5t} - 10\pi cos(10\pi t)\Big|_{t=0} = 5 - 10\pi$

1.5

Μελετήστε τα παρακάτω συστήματα ως προς τις εξής ιδιότητες: στατικότητα, χρονική αμεταβλητότητα, γραμμικότητα, αιτιατότητα και ευστάθεια

$\alpha)$ $y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)}$

$\beta)$ $y(t) = e^t x(-t)$

$\gamma)$ $y(t) = \dot{x}(t)$

$\delta)$ $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

Λύση:

$\alpha)$ $y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)}$

Στατικότητα:

Το σύστημα είναι δυναμικό (διαθέτει μνήμη) αφού η έξοδος τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τη χρονική στιγμή $t-1$.

Χρ.Αμεταβλητότητα:

Αν στην είσοδο έχουμε το σήμα $x(t-t_0)$, τότε στην έξοδο θα έχουμε

$$y_1(t) = \frac{x(t-t_0)}{1 + x(t-t_0-1)} = y(t-t_0)$$

Συνεπώς, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Γραμμικότητα:

Εστω ότι στην είσοδο έχουμε τον γραμμικό συνδυασμό $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ με

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{1 + x_1(t-1)}, \quad \text{και} \quad y_2(t) = \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t-1)}.$$

Τότε στην έξοδο του συστήματος θα έχουμε

$$y(t) = \frac{\alpha x_1(t)}{1 + \alpha x_1(t-1)} + \frac{\beta x_2(t)}{1 + \beta x_2(t-1)} \neq \frac{\alpha x_1(t)}{1 + x_1(t-1)} + \frac{\beta x_2(t)}{1 + x_2(t-1)} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

Αιτιατότητα:

Το σύστημα είναι αιτιατό, αφού η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της εισόδου στην παρούσα και σε παρελθοντικές χρονικές στιγμές.

BIBO Ευστάθεια:

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές αφού για την φραγμένη είσοδο $x(t) = -1$, η έξοδος δεν είναι φραγμένη και απειρίζεται.

$\beta)$ $y(t) = e^t x(-t)$

Στατικότητα:

Το σύστημα είναι δυναμικό και διαθέτει μνήμα αφού η έξοδος την χρονική στιγμή t, εξαρτάται απο τιμές της εισόδου της χρονικής στιγμής $-t$.

Χρ.Αμεταβλητότητα:

Το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο διότι αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0, τότε η έξοδος θα είναι έχουμε

$$y_1(t) = e^t x(-t - t_0) \neq e^{t-t_0} x(-t - t_0) = y(t - t_0)$$

Γραμμικότητα:

Εστω ότι στην είσοδο έχουμε τον γραμμικό συνδυασμό $\alpha x_1(-t) + \beta x_2(-t)$ με

$$y_1(t) = e^t x_1(-t), \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^t x_2(-t).$$

Τότε στην έξοδο του συστήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t[\alpha x_1(-t) + \beta x_2(-t)] \\ &= \alpha e^t x_1(-t) + \beta e^t x_2(t) \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Αιτιατότητα:

Το σύστημα δεν είναι αιτιατό αφού για $t = -2$, η έξοδος εξαρτάται απο μελλόντικές τιμές της εισόδου, αφού $y(-2) = e^{-2}x(2)$

BIBO Ευστάθεια:

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές αφού για σταθερή φραγμένη είσοδο $x(t) = B$ και για οποιοδήποτε K, υπάρχει πάντα T, έτσι ώστε να ισχύει $|y(T)| = |e^T B| > K$.

$\gamma)$ $y(t) = \dot{x}(t)$

Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο της παραγώγου

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Στατικότητα:

Το σύστημα δεν είναι στατικό αλλά διαθέτει μνήμη αφού η έξοδος τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από τιμές της εισόδου τη χρονική στιγμή t^-

Χρ. Αμεταβλητότητα:

Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο αφού αν στην είσοδο έχουμε το σήμα $x(t - t_0)$, τότε στην έξοδο θα έχουμε

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x(t - t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t - t_0) - x(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = y(t - t_0)$$

Γραμμικότητα:

Εστω ότι στην είσοδο έχουμε τον γραμμικό συνδυασμό $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ με

$$y_1(t) = \dot{x}_1(t), \quad \text{και} \quad y_2(t) = \dot{x}_2(t).$$

Τότε στην έξοδο του συστήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d(\alpha x_1(t))}{dt} + \frac{d(\beta x_2(t))}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha x_1(t) - \alpha x_1(t-\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\beta x_2(t) - \beta x_2(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t) - x_1(t-\Delta t)}{\Delta t} + \beta \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t) - x_1(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Αιτιατότητα:

Το σύστημα είναι αιτιατό αφού η έξοδος τη χρονική στιγμή t, εξαρτάται από τιμές της εισόδου τις στιγμές t και t^-

BIBO Ευστάθεια:

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές αφού αν στην είσοδο έχουμε την βηματική συνάρτηση $u(t)$, τότε τη χρονική στιγμή $t = 0$, η έξοδος του διαφοριστή απειρίζεται.

δ) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$

Το σύστημα υπακούει στον τύπο της συνέλιξης και προφανώς εκφράζει ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

Είναι σύστημα δυναμικό αφού η έξοδος του τη χρονική στιγμή t, εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου στο διάστημα ολοκλήρωσης. Επίσης είναι αιτιατό σύστημα αφού η κρουστική του απόκριση είναι μηδενική για $t < 0$ και ευσταθές αφού η κρουστική συνάρτηση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{0}^{\infty} |e^{-t}| dt = 1 < \infty$$

1.6

Αποδείξτε ότι τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου-εξόδου είναι ΓΧΑ και στη συνέχεια βρείτε την κρουστικής του απόκριση.

α) $y(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau) d\tau$

β) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau) x(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x(t - t_i)$

Λύση:

α) $y(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau) d\tau$

Για να δείξουμε ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό, αποδεικνύουμε ότι υπακούει στην αρχή της υπέρθεσης. Αν στο συγκεκριμένο σύστημα εφαρμόσουμε στην είσοδο ένα σήμα

$$\tilde{x}(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

τότε στην έξοδο έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}[\alpha_1 x_1(\tau)+\alpha_2 x_2(\tau)]d\tau \\ &= \alpha_1\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}x_1(\tau)d\tau+\alpha_2\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}x_2(\tau)d\tau \\ &= \alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα είναι γραμμικό. Αν τώρα εφαρμόσουμε στην είσοδο ένα μετατοπισμένο σήμα

$$\tilde{x}(t) = x(t-t_0)$$

τότε στην έξοδο έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}\tilde{x}(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}x(\tau-t_0)d\tau \\ &= \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-t_0-\tau_1}^{t-t_0+\tau_2}x(\tau)d\tau \\ &= y(t-t_0)\end{aligned}$$

οπότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Προφανώς, αν στην είσοδο έχουμε την κρουστική συνάρτηση, τότε στην έξοδο θα πάρουμε την κρουστική απόκριση, η οποία θα είναι

$$h(t) = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2}\delta(\tau)d\tau = \begin{cases}\frac{1}{\tau_1+\tau_2} & -\tau_2 < t < \tau_1 \\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

β) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t-t_i)$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε να τη γράψουμε ως εξής

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t)*p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t)*\delta(t-t_i) \\ &= x(t)*[p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta(t-t_i)] \\ &= x(t)*h(t)\end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε, η παραπάνω σχέση εκφράζει τη συνέλιξη του σήματος $x(t)$ με ένα σύστημα. Συνεπώς, πρόκειται για ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta(t-t_i)$$

1.7

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος $y(t) = x(t)*h(t)$ για τα παρακάτω ζεύγη εισόδων-κρουστικών αποκρίσεων

α) $x(t) = u(t-1), \;\; h(t) = u(t) + \frac{d\delta(t-1)}{dt}$

β) $x(t) = e^{at}u(t), \;\; h(t) = e^{\beta t}u(t)$. Εξετάστε τις περιπτώσεις $\alpha \neq \beta$ και $\alpha = \beta$.

γ) $x(t) = e^{2t}u(t), \;\; h(t) = e^{-3t}u(t)$. Στην περίπτωση αυτή δείξτε ότι το σύστημα είναι αιτιατό και BIBO ευσταθές.

Λύση:

α) $x(t) = u(t-1), \;\; h(t) = u(t) + \frac{d\delta(t-1)}{dt}$

Από τον τύπο της συνέλιξης έχουμε

$$y(t) = x(t) * h(t) = u(t-1) * u(t) + u(t-1) * \frac{d\delta(t-1)}{dt}$$

Εξετάζοντας κάθε όρο χωριστά έχουμε

$$\begin{aligned} u(t-1) * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{1}^{t} u(t-\tau)d\tau \\ &= (t-1)u(t-1) \end{aligned}$$

και για την δεύτερη συνέλιξη

$$\begin{aligned} u(t-1) * \frac{d\delta(t-1)}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau-1)\dot{\delta}(\tau-1)d\tau \quad //\text{θέτουμε } \tau-1=r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r-2)\dot{\delta}(r)dr \\ &= -\frac{du(t-r-2)}{dr}\bigg|_{r=0} \\ &= (-1)(-1)\delta(t-r-2)\big|_{r=0} \\ &= \delta(t-2) \end{aligned}$$

Άρα, η έξοδος του συστήματος θα δίνεται από την σχέση

$$y(t) = x(t) * h(t) = (t-1)u(t-1) + \delta(t-2)$$

β) $x(t) = e^{at}u(t), \;\; h(t) = e^{\beta t}u(t)$

Παίρνουμε τον τύπο της συνέλιξης και έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau}u(\tau)e^{\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{t} e^{\alpha\tau}e^{\beta(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $\alpha \neq \beta$, τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{\beta t} e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \\ &= e^{\beta t} \frac{e^{(\alpha-\beta)t} - 1}{\alpha - \beta} u(t) \\ &= \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} u(t) \end{aligned}$$

Αν $\alpha = \beta$ τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_0^t e^{\alpha\tau} e^{\beta(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t e^{\alpha t} d\tau \\ &= t e^{\alpha t} u(t) \end{aligned}$$

γ) $x(t) = e^{2t}u(t), \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$

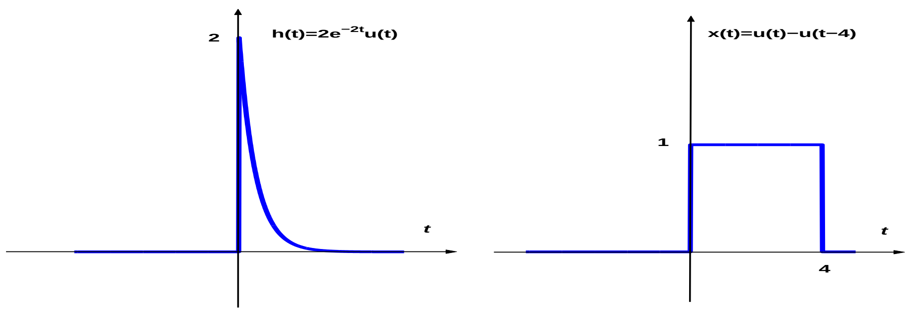
Χρησιμοποιώντας τον τύπο που υπολογίσαμε πριν μπορούμε να πάρουμε κατευθείαν την τελική μορφή της εξόδου, οπότε

$$y(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})u(t)$$

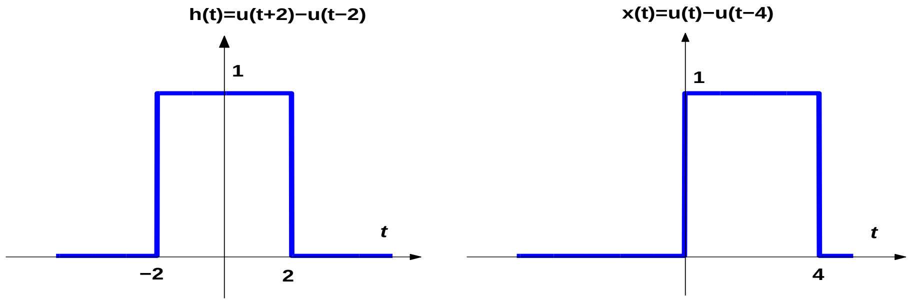
Το σύστημα είναι αιτιατό αφού η κρουστική του απόκριση είναι μηδενική για $t < 0$. Επίσης είναι ευσταθές, αφού η συνάρτηση $h(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{-3t}dt = -\frac{1}{3}[e^{-3t}]_0^{\infty} = \frac{1}{3} < \infty$

1.8

Υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο $y(t)$ του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ για την είσοδο $x(t)$, όπως αυτές φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



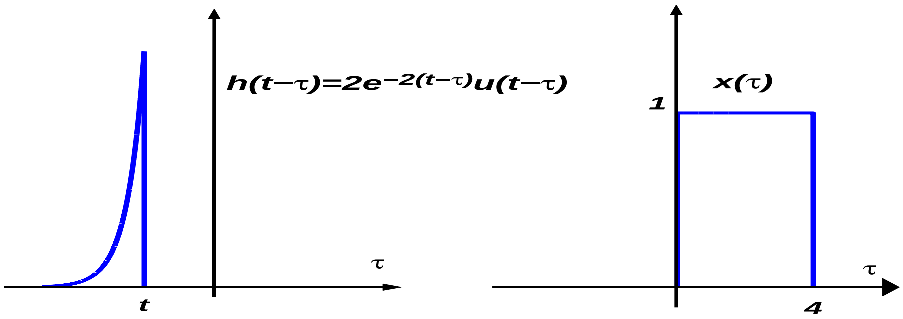
α)



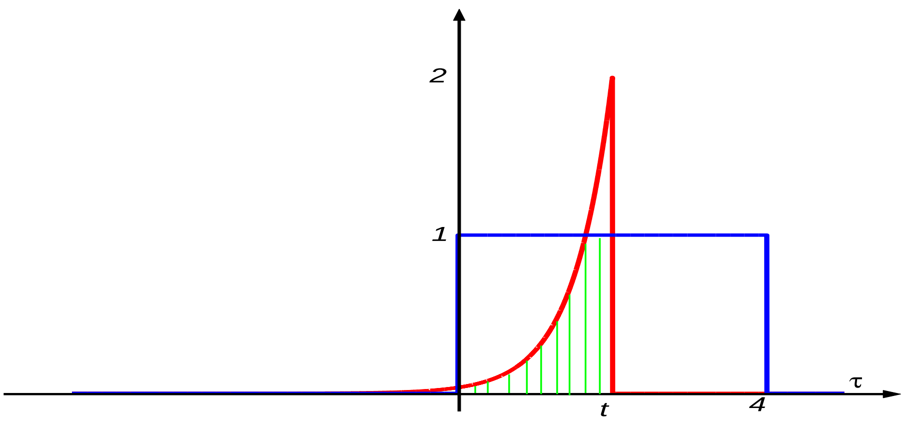
$\beta)$

Λύση:

α) Έστω ότι αντιστρέφουμε στο χρόνο την κρουστική απόκριση και παίρνουμε τις συναρτήσεις συναρτήσει του τ. Στην συνέχεια μετακινούμε στο χρόνο την αντεστραμμένη συνάρτηση και η έξοδος



της συνέλιξης για κάθε σημείο t, θα είναι το ολοκλήρωμα του γινόμενού τους. Τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από την περιοχή επικάλυψης. Προφανώς για $t < 0$, δεν υπάρχει επικάλυψη των γραφικών παραστάσεων οπότε η έξοδος θα είναι $y(t) = 0$. Όταν $0 < t < 4$, τότε το κοινό τους κομμάτι εκτείνεται από 0 εως τ, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα και το οποίο θα ορίζει τα άκρα ολοκλήρωσης. Εφόσον η μία παράσταση μετατοπίζεται στο χρόνο, αναμένουμε ο τύπος της συνέλιξης να μας δώσει μία συνάρτηση του t. Για να υπολογίσουμε λοίπόν την έξοδο του συστήματος



στο διάστημα $0 < \tau < 4$, χρησιμοποιούμε τον τύπο της συνέλιξης και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στα συγκεκριμένα "μεταβλητά" όρια, δηλαδή

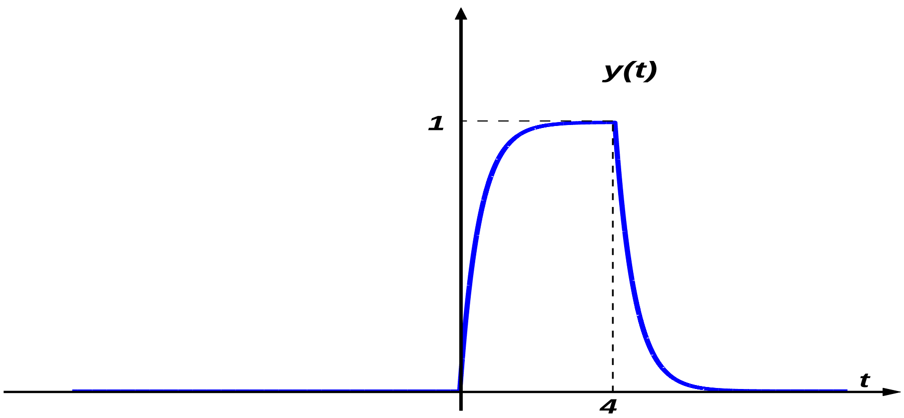
$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = 2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau = e^{-2(t-\tau)}\big|_0^t = (1-e^{-2t})$$

Όταν το σημείο t φτάσει το σημείο $\tau = 4$ τότε η κοινή περιοχή θα μεταβάλλεται αλλά προφανώς τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι σταθερά και συγκεκριμένα θα είναι το διάστημα $[0, 4]$, αφού για $\tau > 4,\ x(\tau) = 0$. 'Ετσι λοιπόν, όταν $t > 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^4 h(t-\tau)x(\tau)d\tau = 2\int_0^4 e^{-2(t-\tau)}d\tau = e^{-2(t-\tau)}\big|_0^4 \\ &= (e^{-2(t-4)} - e^{-2t}) \\ &= (e^8 - 1)e^{-2t} \end{aligned}$$

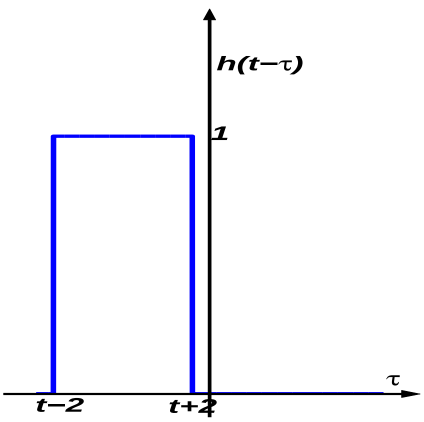
'Αρα η έξοδος του συστήματος δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση και παριστάνεται γραφικά όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

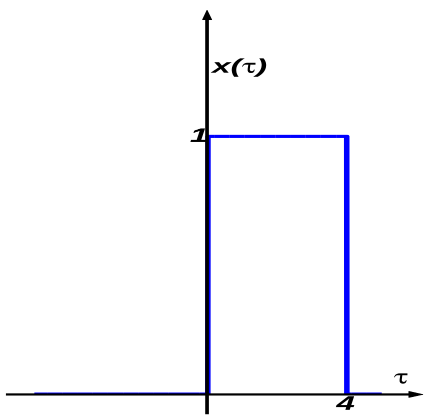
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & 0 \le t \le 4 \\ (e^8 - 1)e^{-2t} & 4 < t \end{cases}$$



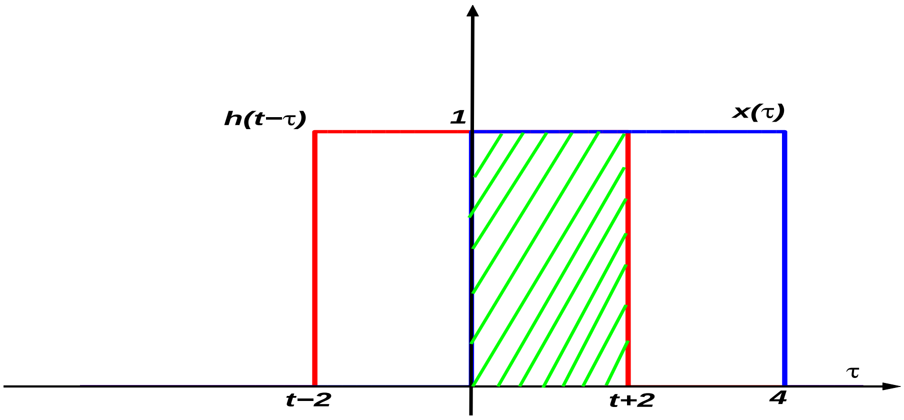
β)

Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση και παίρνουμε τις συναρτήσεις $h(t-\tau)$ και $x(\tau)$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Η αντεστραμμένη κρουστική απόκριση μετατοπίζεται στο χρόνο ώστε





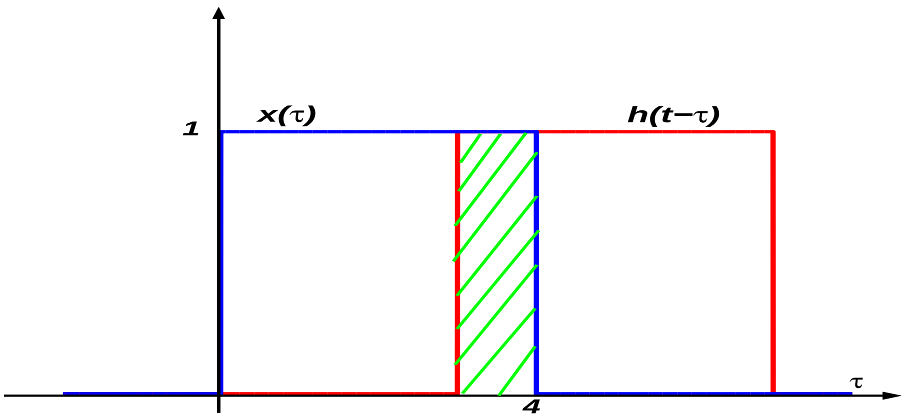
να παραχθεί η έξοδος του συστήματος. Όσο το $t < -2$, δηλαδή $t + 2 < 0$, δεν υπάρχει επικάλυψη, οπότε η έξοδος είναι μηδέν. Όσο το $-2 < t < 2$, δηλαδή το $t+2$ κινείται μέσα στο $[0, 4]$, η επικαλυπτόμενη περιοχή αυξάνεται γραμμικά. Ένα στιγμιότυπο φαίνεται στο επόμενο σχήμα όπου το γραμμοσκιασμένο εμβαδό είναι η στιγμιαία έξοδος της συνέλιξης, αφού οι παλμοί είναι τετραγωνικοί κι ένουν το ίδιο και μοναδιαίο πλάτος. (Σε περίπτωση που δεν έχουμε τέτοιας μορφής παλμούς, δεν ισούται το εμβαδό της κοινής περιοχής με την τιμή της συνέλιξης). Η επικαλύπτόμενη



περιοχή ορίζει και τα όρια ολοκλήρωσης στον υπολογισμό της συνέλιξης, οπότε για το συγκεκριμένο διάστημα $-2 < t < 2$, η περιοχή αυτή εκτείνεται από το $\tau = 0$ ως το $\tau = t+2$ οπότε η έξοδος θα δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_0^{t+2} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^{t+2} d\tau = t+2$$

Προφανώς, το αποτέλεσμα της συνέλιξης (εμβαδό), θα πάρει στιγμιαία τη μέγιστη τιμή του, όταν το άκρο $t+2$ έρθει στην θέση $\tau = 4$, όπου θα έχουμε και την πλήρη επικάλυψη λόγω του κοινού εύρους των παλμών. Στη συνέχεια, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, το μετακινούμενο "πλαίσιο" θα αρχίσει να εξέρχεται και το εμβαδό να μειώνεται, μέχρι να μηδενιστεί όταν το άκρο $t-2$ έρθει στη θέση $\tau = 4$, δηλαδή $t = 6$. Έτσι λοιπόν κατά την έξοδο του πλαισίου το διάστημα ολοκλήρωσης



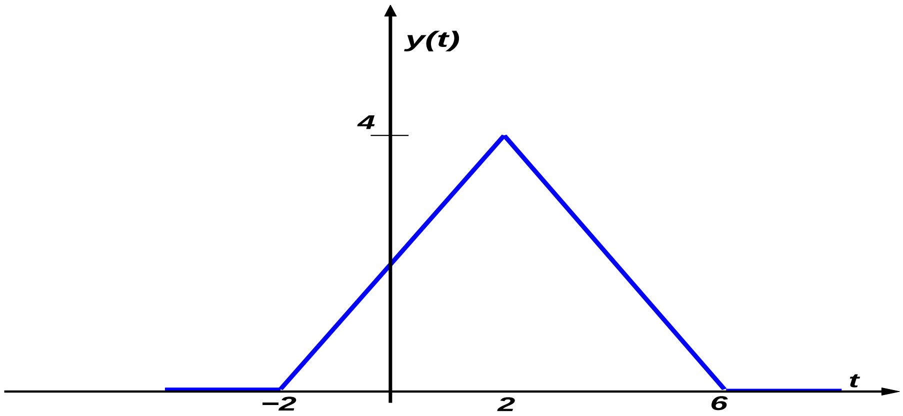
είναι το $[t-2, 4]$, οπότε στην περίπτωση αυτή, το αποτέλσμα της συνέλιξης για $2 < t < 6$ θα είναι

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t-2}^{4} d\tau = 6-t$$

Όπως αναφέραμε, για $t > 6$, δεν υπάρχει επικάλυψη και το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι $y(t) = 0$. Συνοψίζοντας, η συνέλιξη δίνεται από τη σχέση

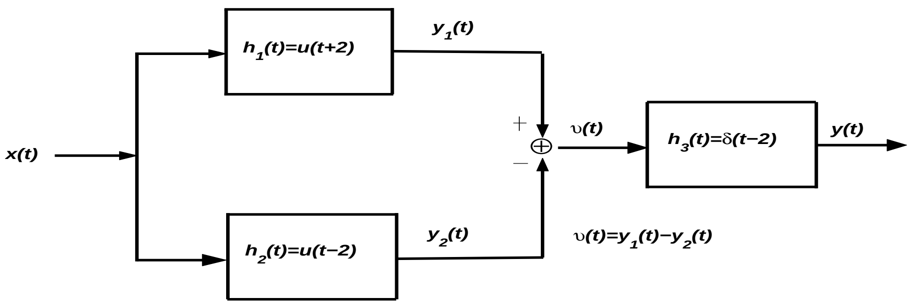
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ t+2 & -2 \le t \le 2 \\ 6-t & 2 < t < 6 \\ 0 & 6 < t \end{cases}$$

και η γραφική της παράσταση είναι η εξής



1.9

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και εξετάστε αν το συνολικό σύστημα είναι αιτιατό και BIBO ευσταθές.



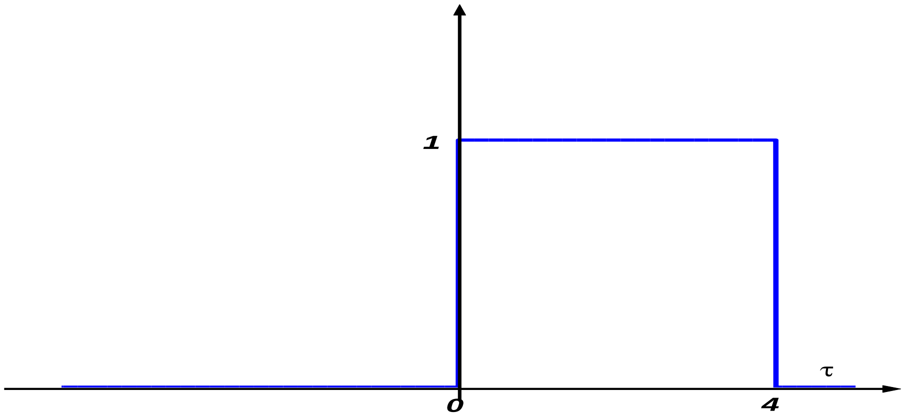
Το σήμα $\upsilon(t)$ είναι η διαφορά των εξόδων των δύο παράλληλων φίλτρων, οπότε παίρνωντας τη συνέλιξη έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \upsilon(t) &= h_1(t) * x(t) - h_2(t) * x(t) \\ &= (h_1(t) + h_2(t)) * x(t) \\ &= (u(t+2) - u(t-2)) * x(t) \end{aligned}$$

Η έξοδος $y(t)$ είναι η συνέλιξη του σήματος $\upsilon(t)$ με το τρίτο φίλτρο οπότε

$$\begin{aligned} (t) &= \delta(t) * \upsilon(t) \\ &= \delta(t-2) * (u(t+2) - u(t-2)) * x(t) \\ &= (u(t) - u(t-4)) * x(t) \\ &= h(t) * x(t) \end{aligned}$$

Επομένως η κρουστική απόκριση όλου του συστήματος είναι $h(t) = u(t) - u(t-4)$ και παριστάνεται γραφικά ως εξής

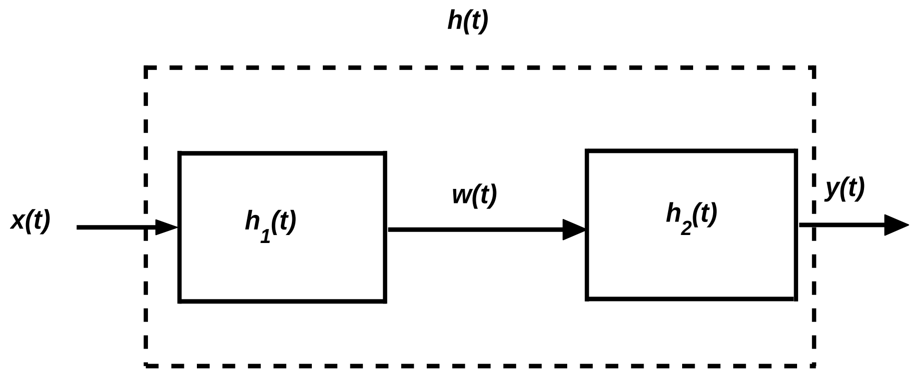


Εφόσον η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι μηδενική για $t < 0$, τότε το σύστημα είναι αιτιατό. Επίσης το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές αφού η κρουστική του απόκριση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{0}^{4} 1 dt = 4 < \infty$$

1.10

Στο παρακάτω σχήμα το πρώτο ΓΧΑ έχει κρουστική απόκριση $h_1(t) = u(t+3)$ ενώ το δεύτερο (συνδεδεμένο σε σειρά) ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = \dot{w}(t) - \pi w(t)$. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος. Δώστε μια έκφραση της εξόδου $y(t)$ ως συνάρτηση της εισόδου $x(t)$, χρησιμοποιώντας καθυστερητές, διαφοριστές και ολοκληρωτές. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εκφράσετε την έξοδο στην μορφή $y(t) = Ax(t-t_1) + B\frac{dx(t-t_2)}{dt} + C\int_{-\infty}^{t-t_3} x(\tau)d\tau$)



Αν στην είσοδο εφαρμόσουμε την κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, τότε η έξοδος του πρώτου συστήματος θα είναι η κρουστική του απόκριση, δηλαδή

$$w(t) = u(t+3)$$

οπότε στην έξοδο του δεύτερου συστήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt}u(t+3) - \pi u(t+3) \\ &= \delta(t+3) - \pi u(t+3) \end{aligned}$$

που είναι και η κρουστική απόκριση του συστήματος. Συνεπώς, αν έχω ένα σήμα $x(t)$ στην είσοδο, μπορώ να γράψω για την έξοδο

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau+3)x(t-\tau)d\tau - \pi \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau+3)x(t-\tau)d\tau \\
&= x(t+3) - \pi \int_{-3}^{\infty} x(t=\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Θέτοντας $t-\tau=k$, τότε το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{t+3}^{-\infty} x(k)d(-k) = \int_{-\infty}^{t+3} x(k)dk$$

οπότε

$$y(t) = x(t+3) + \pi \int_{-\infty}^{t+3} x(k)d(k)$$

Ουσιαστικά η συνέλιξη με ένα φίλτρο του οποίου η κρουστική απόκριση είναι η $u(t)$ ή μια μετατοπισμένη έκδοση αυτής, ισοδυναμεί με την εφαρμογή ενός ολοκληρωτή. Στην συνέχεια βλέπουμε ότι το σήμα περνάει από το δεύτερο φίλτρο το οποίο αποτελείται απο μια παράλληλη σύνδεση ενός διαφοριστή κι ενός ενισχυτή κατά $-\pi$. Στην παραπάνω έκφραση που προέκυψε, δεν υπάρχει όρος με την παράγωγο της εισόδου, αφού εφαρμόζουμε στην σειρά έναν ολοκληρωτή και έναν διαφοριστή και το σήμα δεν επηρεάζεται.