Λύσεις Δ' Σετ ασκήσεων

1.1 Προσδιορίστε ποια από τα σήματα που δίνονται παρακάτω είναι περιοδικά. Για όσα είναι περιοδικά, υπολογίστε την θεμελιώδη περίοδο

α) $x(n) = \cos(0.125\pi n)$

β) $x(n) = Re\{e^{jn\pi/12}\} + Im\{e^{jn\pi/18}\}$

γ) $x(n) = \sin(\pi + 0.2n)$

δ) $x(n) = e^{j\pi n/16}\cos(n\pi/17)$

Λύση:

α) $x(n) = \cos(0.125\pi n)$
Επειδή $0.125\pi = \pi/8$, και

$$\cos\big(\frac{\pi}{8}n\big) = \cos\big(\frac{\pi}{8}(n+16)\big)$$

η ακολουθία $x(n)$ είναι περιοδική με $N = 16$

β) $x(n) = Re\{e^{jn\pi/12}\} + Im\{e^{jn\pi/18}\}$
Στην περίπτωση αυτή έχουμε το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων,

$$x(n) = \cos(n\pi/12) + \sin(n\pi/18)$$

όπου η περιόδος του πρώτου σήματος είναι $N_1 = 24$, ενώ του δευτέρου είναι $N_2 = 36$. Συνεπώς, η περίοδος του αθροίσματος είναι

$$N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)} = \frac{24 \cdot 36}{\gcd(24, 36)} = \frac{864}{12} = 72$$

γ) $x(n) = \sin(\pi + 0.2n)$
Για να είναι η ακολουθία αυτή περιοδική, πρέπει να μπορούμε να βρούμε μια τιμή για το N, τέτοια ώστε

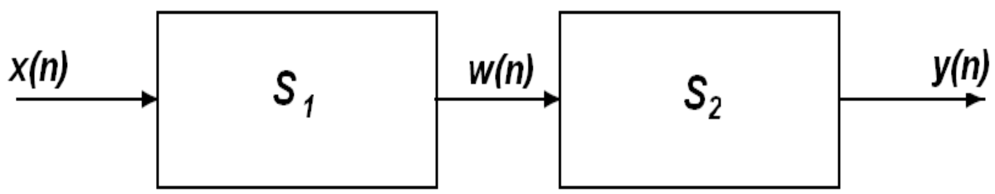
$$\sin(\pi + 0.2n) = \sin(\pi + 0.2(n + N))$$

Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι περιοδική με περίοδο 2π. 'Ετσι, η ποσότητα $0.2N$ πρέπει να είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Ωστόσο, επειδή ο αριθμός π είναι άρρητος, δεν υπάρχει καμία τιμή για το N, τέτοια ώστε να επαληθεύεται η ισότητα. Επομένως η ακολουθία αυτή δεν είναι περιοδική.

δ) $x(n) = e^{j\pi n/16} \cos(n\pi/17)$
Στην περίπτωση αυτή έχουμε το γινόμενο δύο περιοδικών ακολουθιών με περιόδους $N_1 = 32$ και $N_2 = 34$. Άρα, η θεμελιώδης περίοδος είναι

$$N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)} = \frac{32 \cdot 34}{\gcd(32, 34)} = 544$$

1.2 Θεωρείστε τη σύνδεση σε σειρά (cascade) δύο συστημάτων S_1 και S_2 όπως φαίνονται στο σχήμα



α) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά και ευσταθή, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αιτιατό και ευσταθές;

β) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι μη γραμμικά, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα μη γραμμικό;

γ) Αν και τα δύο συστήματα είναι χρονικά αμετάβλητα, θα αποτελεί η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα επίσης χρονικά αμετάβλητο;

Λύση:

α) Η γραμμικότητα, η χρονική αμεταβλητότητα, η αιτιατότητα και η ευστάθεια μπορεί να δειχθεί ότι διατηρούνται στη συνδεσμολογία σειράς.

Η απόκριση του S_1 στην είσοδο $\alpha x_1(n) + bx_2(n)$ θα είναι $\alpha w_1(n) + bw_2(n)$ εξαιτίας της γραμμικότητάς του. Η έξοδος αυτή θα είναι η είσοδος στο S_2, του οποίου η απόκριση λόγω γραμμικότητας θα είναι $\alpha y_1(n) + by_2(n)$. Άρα, αν και τα δύο συστήματα είναι γραμμικά τότε και η σύνδεσή τους σε σειρά θα είναι ένα γραμμικό σύστημα.

Ομοίως, αν η είσοδος στο S_1 είναι η $x(n - n_0)$, η απόκριση θα είναι $w(n - n_0)$. Επιπλέον, επείδη και το S_2 είναι χρονικά αμετάβλητο, η απόκρισή του στην είσοδο $w(n - n_0)$ θα είναι $y(n - n_0)$. Επομένως, η απόκριση του συνολικού συστήματος στην είσοδο $x(n - n_0)$ θα είναι $y(n - n_0)$ κι έτσι και το συνολικό σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Η αιτιατότητα της σύνδεσης σε σειρά, έπεται παρατηρώντας ότι αν το S_2 είναι αιτιατό, η $y(n)$ στο χρόνο $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τη $w(n)$ για $n < n_0$. Επίσης, επιδή το S_1 είναι αιτιατό, η $w(n)$ για $n < n_0$ θα εξαρτάται μόνο από την είσοδο $x(n)$ για $n < n_0$ κι επομένως το συνιστάμενο σύστημα είναι κι αυτό αιτιατό.

Τέλος, για να αποδειχθεί η ευστάθεια του συνισταμένου συστήματος, παρατηρούμε ότι με το S_1 ευσταθές, αν η $x(n)$ είναι φραγμένη, η έξοδος $w(n)$ θα είναι επίσης φραγμένη και επομένως, λόγω ευστάθειας του S_2, και η έξοδος $y(n)$ θα είναι φραγμένη. Συνεπώς, η σε σειρά συνδεσμολογία θα αποτελεί ευσταθές σύστημα.

β) Αν τα S_1 και S_2 είναι μη γραμμικά, δεν είναι απαραίτητο και η σύνδεσή τους σε σειρά να είναι ένα μη γραμμικό σύστημα επιδή είναι δυνατό, το δεύτερο σύστημα να άρει τη μη γραμμικότητα του πρώτου. Για παράδειγμα, αν

$$w(n) = S_1[x(n)] = exp(x(n))$$

και

$$y(n) = S_2[w(n)] = log(w(n))$$

τότε, ακόμα κι αν τα S_1 και S_2 είναι μη γραμμικά, η σύνδεσή τους σε σειρά αποτελεί ένα ταυτοτικό σύστημα, όποτε είναι γραμμικό.

γ) Όπως και στο β), αν τα S_1 και S_2 είναι χρονικά μεταβαλλόμενα, δεν είναι απαραίτητο και η σύνδεσή τους σε σειρά να είναι ένα σύστημα χρονικά μεταβαλλόμενο. Για παράδειγμα, αν το πρώτο σύστημα είναι ένας *διαμορφωτής*,

$$w(n) = x(n) \cdot e^{jn\omega_0}$$

και το δεύτερο είναι ένας *αποδιαμορφωτής*,

$$y(n) = w(n) \cdot e^{-jn\omega_0}$$

η σύνδεσή τους σε σειρά είναι ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητο, ακόμη κι αν τα επιμέρους συστήματα είναι χρονικά μεταβαλλόμενα. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η σύνδεση σε σειρά ενός *υπερδειγματολήπτη* ή *πολλαπλασιαστή συχνότητας* (up sampler), όπου

$$w(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

και ενός *υποδειγματολήπτη* ή *διαιρέτη συχνότητας* (down sampler), όπου

$$y(n) = w(2n)$$

Στην περίπτωση αυτή, η σύνδεσή τους σε σειρά είναι αμετάβλητη κατά τη μετατόπιση και είναι επίσης $y(n) = x(n)$ (αν αντιστραφεί η σειρά των συστημάτων, το συνιστάμενο σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο). Επίσης, αν ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα, όπως ένα σύστημα μοναδιαίας καθυστέρησης, παρεμβληθεί ανάμεσα στα δύο συστήματα, τότε στη γενική περίπτωση, η σύνδεση σε σειρά υπερδειγματολήπτη-ΓΧΑ συστήματος-υποδειγματολήπτη θα είναι ένα σύστημα χρονικά μεταβαλλόμενο.

1.3 Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια τα παρακάτω συστήματα, τα οποία περιγράφονται είτε μέσω της σχέσης εισόδου-εξόδου, είτε μέσω της κρουστικής τους απόκρισης.

α) $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

β) $y(n) = \log(1+ \mid x(n) \mid)$

γ) $h(n) = \dfrac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|}$

δ) $h(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(-n)$

Λύση:

α) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

Το σύστημα αυτό αντιστοιχεί σε ένα ψηφιακό ολοκληρωτή. Αν θεωρήσουμε ως είσοδο τη βηματική συνάρτηση $u(n)$, τότε η βηματική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k) = n + 1$$

Συνεπώς, αν και η είσοδος είναι φραγμένη, η απόκριση του συστήματος δεν είναι φραγμένη.

β) $y(n) = \log(1 + \mid x(n) \mid)$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το σύστημα αυτό είναι ευσταθές, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ανισότητα

$$\log(1 + x) \leq x, \quad x \geq 0$$

Ειδικότερα, αν η $x(n)$ είναι φραγμένη, $|x(n)| < M$,

$$|y(n)| = |\log(1 + |x(n)|)| \leq 1 + |x(n)| < 1 + M$$

Επομένως, η έξοδος είναι φραγμένη και το σύστημα είναι ευσταθές.

γ) $h(n) = \dfrac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|}$

Στην περίπτωση αυτή όλα τα μέλη του παρονομαστή είναι μη αρνητικά, οπότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \leq 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$$

είναι αθροίσιμη για $\alpha > 0$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

δ) $h(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(-n)$

Εξετάζοντας το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$, έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n + \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} = 4 < \infty$$

συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

1.4 Αν η απόκριση ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος στη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι

$$s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

να βρεθεί η κρουστική απόκριση, $h(n)$.

Λύση:

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Συνεπώς, λόγω γραμμικότητας, η κρουστική απόκριση $h(n)$ συνδέεται με τη βηματική απόκριση $s(n)$, ως εξής

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

Άρα, δεδομένης της $s(n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
h(n) &= s(n) - s(n-1) \\
&= n\big(\frac{1}{2}\big)^n u(n) - (n-1)\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1} u(n-1) \\
&= \big[n\big(\frac{1}{2}\big)^n - 2(n-1)\big(\frac{1}{2}\big)^n\big] u(n-1) \\
&= (2-n)\big(\frac{1}{2}\big)^n u(n-1)
\end{aligned}$$

1.5 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z και όπου υπάρχει, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου, καθεμιάς από τις παρακάτω ακολουθίες και να δοθεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών στο z-επίπεδο

$\alpha)$ $x(n) = \delta(n-1)$

$\beta)$ $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, (δεξιάς επέκτασης)

$\gamma)$ $x(n) = -(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$, (αριστερής επέκτασης)

$\delta)$ $x(n) = \big[(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n\big] u(n)$

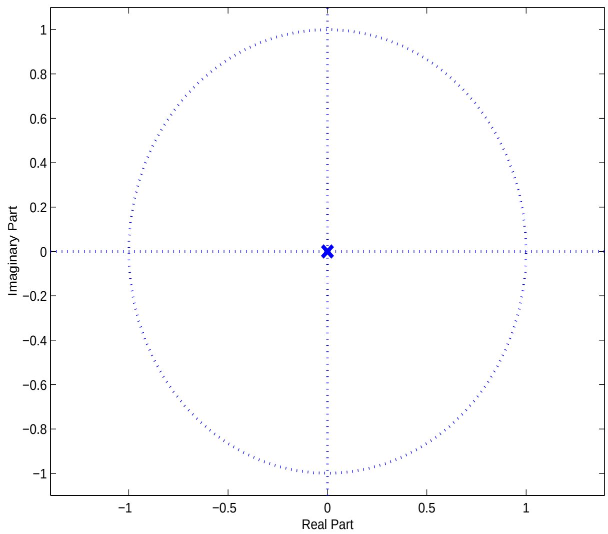
Λύση:

$\alpha)$ $x(n) = \delta(n-1)$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Z, έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = z^{-1}$$

και η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 0$. Εφόσον η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης και είναι ο $X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$. Η $X(z)$ έχει τον πόλο $z = 0$ και το μηδενικό $z = \infty$.



β) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, (δεξιάς επέκτασης)

Από τον ορισμό κι αφού η ακολουθία είναι αιτιατή (δεξιάς επέκτασης) έχουμε

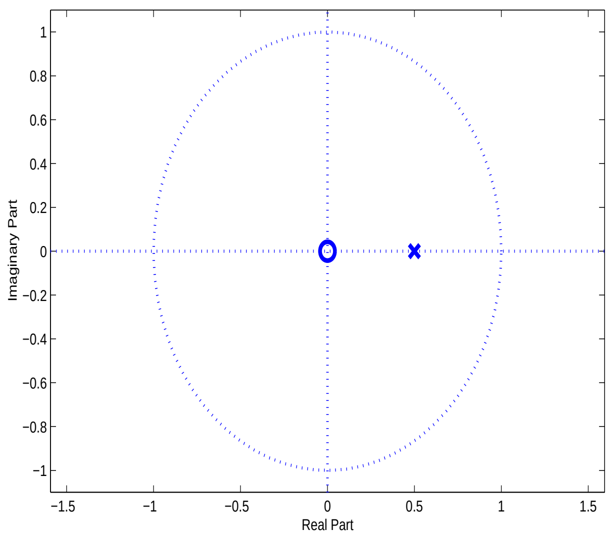
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}) u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2} z^{-1})^n$$

που συγκλίνει σε

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

για $|z| > 1/2$. Η $X(z)$ έχει ένα μηδενικό στο $z = 0$ κι ένα πόλο στο $z = \frac{1}{2}$. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier και είναι

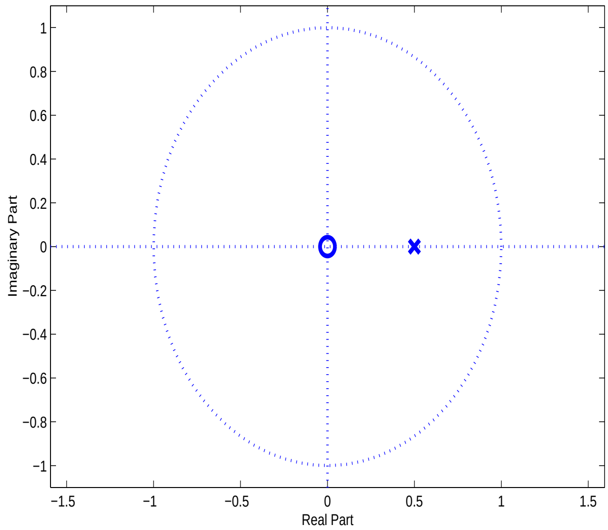
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$



γ) $x(n) = -(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$, (αριστερής επέκτασης) Για τη μή αιτιατή ακολουθία $x(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(\frac{1}{2})^n u(-n-1) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} -(\frac{1}{2})^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -(\frac{1}{2})^{-n} z^n \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} [(\frac{1}{2})^{-1} z]^n \\
&= 1 - \frac{1}{1 - 2z} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}
\end{aligned}$$

με $|z| < 1/2$. Η $X(z)$ έχει μηδενικό στο $z = 0$ και πόλο στο $z = 1/2$. Εφόσον στην περιοχή σύγκλισεις δεν συμπεριλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της ακόλουθίας δεν υπάρχει.

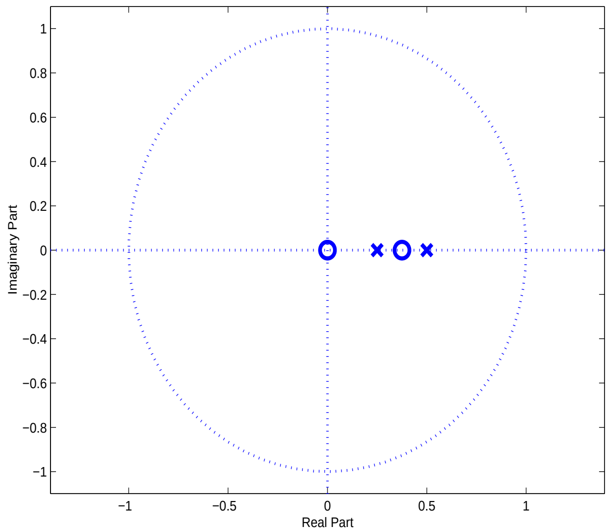


δ) $x(n) = \left[(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n\right]u(n)$
'Απο τον ορισμό και πάλι έχουμε

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n]u(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2}z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4}z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \\
&= \frac{2-\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

με την προϋπόθεση ότι $|z| > 1/2$. Η $X(z)$ έχει πόλους στο $z = 1/4$ και στο $z = 1/2$ και μηδενικά στα σημεία $z = 0$ και $z = 3/8$. Αφού ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης, θα συγκλίνει και ο μετασχηματισμός Fourier ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$



1.6 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z των ακολουθιών $y(n)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Z της $x(n)$

α) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$

β) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-kN)$, όπου $x(n)$ μια ακολουθία μήκους με μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $0 \leq n \leq N-1$

Λύση:

α) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$x(n) = y(n) - y(n-1)$$

Συνεπώς, αν μετασχηματίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης του μετασχηματισμού Z, βρίσκουμε ότι

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$$

και λύνοντας ως προς $Y(z)$ έχουμε

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

που είναιο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $y(n)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι η $y(n)$ είναι η συνέλιξη της $x(n)$ με τη μοναδιαία βηματική ακολουθία,

$$y(n) = x(n) * u(n)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης, έχουμε

$$Y(z) = X(z)U(z)$$

όπου

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Σχετικά με την περιοχή σύγκλισης, παρατηρούμε ότι επειδή η ΠΣ της $U(z)$ είναι τα σημεία με $|z| > 1$, η ΠΣ της $Y(z)$ θα είναι τουλάχιστο το σύνολο

$$R_y = R_x \bigcap |z| > 1$$

όπου R_x η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$.

β) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n - kN)$
Η μονόπλευρη περιοδική ακολουθία $y(n)$ μπορεί να γραφεί ως η συνέλιξη της $x(n)$ με την παλμοσειρά

$$p_N(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - kN)$$

δηλαδή

$$y(n) = x(n) * p_N(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n - kN)$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Z της $p_N(n)$ θα είναι

$$P_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN} = \frac{1}{1 - z^{-N}}, \quad |z| > 1$$

Αρα, ο μετασχηματισμός Z της μονόπλευρης περιοδικής ακολουθίας $y(n)$ είναι

$$Y(z) = X(z)P_N(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-N}}$$

Επειδή η $x(n)$ είναι πεπερασμένου μήκους και μηδενίζεται για $n < 0$, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει τα σημεία $|z| > 0$, οπότε η ΠΣ της $Y(z)$ καλύπτει τα σημεία $|z| > 1$.

1.7 Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, υπολογίστε τον μετασχηματισμό Z των ακολουθιών

α) $x(n) = n(\frac{1}{2})^n u(n-2)$

β) $x(n) = \frac{1}{n}(-2)^{-n} u(-n-1)$

Λύση:

α) $x(n) = n(\frac{1}{2})^n u(n-2)$
Σύμφωνα με την ιδιότητα τηα παραγώγου, αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της $x(n)$, τότε

$$\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Αν θέσουμε $x(n) = nw(n)$, όπου

$$w(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)$$

τότε κάνοντας χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο και του ζεύγους

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n u(n)\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

έπεται ότι

$$W(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Έτσι με χρήση της ιδιότητας της παραγώγου, λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Z της $x(n)$

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}W(z) = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

β) $x(n) = \frac{1}{n}(-2)^{-n}u(-n-1)$
Ο απευθείας υπολογισμός του μετασχηματισμού Z της ακολουθίας αυτής είναι δύσκολος λόγω του παράγοντα n^{-1}. Αν όμως ορίσουμε μια νέα ακολουθία

$$y(n) = nx(n) = (-2)^{-n}u(-n-1)$$

ο μετασχηματισμός Z της $y(n)$ προσδιορίζεται εύκολα και είναι

$$Y(z) = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Παρατηρώντας τη σχέση μεταξύ των $x(n)$ και $y(n)$, Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, ώστε να σχηματιστεί μια διαφορική εξίσωση ως προς τη $X(z)$, που είναι

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ή

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{1}{z+\frac{1}{2}}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$X(z) = \log(z+\frac{1}{2})$$

και η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τα σημεία για τα οποία είναι $|z| < \frac{1}{2}$

1.8 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Z της εξόδου του υπερδειγματολήπτη ως προς το μετασχηματισμό Z της εισόδου του. Στη συνέχεια υπολογίστε το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^{n/10} & n = 0, 10, 20, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση:

Ο υπερδειγματολήπτης ή πολλαπλασιαστής συχνότητας δειγματοληψίας, αποτελεί μια πράξη η οποία επεκτείνει μια ακολουθία στο χρόνο εισάγοντας μηδενικά μεταξύ των τιμών της ακολουθίας. Έστω ότι $x(n)$ είναι η είσοδος του υπερδειγματολήπτη, ο οποίος εισάγει L μηδενικά μεταξύ των δειγμάτων της ακολουθίας. Τότε η έξοδός του θα δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφόσον η $y(n)$ είναι ίση με το μηδέν για όλα τα $n \neq kL$ και με $x(n/L)$ για τα σημεία $n = kL$, ο μετασχηματισμός Z της έξόδου του υπερδειγματολήπτη θα είναι

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-nL} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (z^L)^{-n} \\ &= X(z^L) \end{aligned}$$

Αν η $X(z)$ συγκλίνει για $\alpha < |z| < \beta$, η $Y(z)$ θα συγκλίνει για $\alpha < |z^L| < \beta$ ή $\alpha^{\frac{1}{L}} < |z| < \beta^{\frac{1}{L}}$.

Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^{n/10} & n = 0, 10, 20, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

κάνουμε χρήση του ζεύγους

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n u(n)\} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > \alpha$$

και θεωρώντας ότι η $x(n)$ είναι η έξοδος ενός υπερδειγματολήπτη με $L = 10$, όταν η είσοδος είναι $\alpha^n u(n)$. Συνεπώς, κάνοντας χρήση των παραπάνω, ο μετασχηματισμός Z της $x(n)$ θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-10}}, \quad |z| > \alpha^{\frac{1}{10}}$$

1.9 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $X(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

β) $X(z) = \dfrac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)^2}, \quad |z| < \dfrac{1}{2}$

γ) $X(z) = \dfrac{z + 2}{z + 1}$

δ) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z - 1)(z + 3)^2}$, αιτιατή ακολουθία

Λύση:

α) $X(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

Παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής είναι διαφορά τετραγώνων, αναλύουμε την $X(z)$ ως εξής

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

όπου

$$A = (1+\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

και

$$B = (1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Συνεπώς, την $X(z)$ μπορούμε να τη γράψουμε

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Η συνάρτηση έχει δύο πόλους στο $z = 1/2$ και στο $z = -1/2$ και η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ενός κύκλου. Επομένως η ακολουθία είναι αιτιατή και θα δίνεται από τη σχέση

$$x(n) = \frac{3}{2}\big(-\frac{1}{2}\big)^n u(n) - \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\big)^n u(n)$$

β) $X(z) = \dfrac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\big(1-\frac{1}{2}z^{-1}\big)^2}, \quad |z| < \dfrac{1}{2}$

Για να υπολογίσουμε την ακολουθία στο χρόνο κάνουμε πάλι ανάλυση σε απλά κλάσματα οπότε επειδή η $X(z)$ έχει ένα διπλό πραγματικό πόλο, διασπάται ως εξής

$$\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{Bz^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

από όπου παίρνουμε την εξίσωση των πολυωνύμων

$$z^{-1} - \frac{1}{2} = A\big(1-\frac{1}{2}z^{-1}\big) + Bz^{-1} = A + z^{-1}\big(-\frac{1}{2}A + B\big)$$

Με εξίσωση των αντίστοιχων συντελεστών έχουμε ότι $A = -1/2$ και $B = 3/4$. Άρα, αφού η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός κύκλου, η ακολουθία θα είναι μή αιτιατή και θα δίνεται από τη σχέση

$$x(n) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\big)^n u(-n-1) - \frac{3}{4}\big(\frac{1}{2}\big)^n nu(-n-1)$$

γ) $X(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$

Κάνοντας μια απλή ανάλυση παίρνουμε ότι

$$X(z) = \frac{z+2}{z+1} = \frac{z}{z+1} + \frac{2}{z+1}$$

και κάνοντας χρήση του ζεύγους

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-\alpha}\} = \alpha^n u(n), \quad |z| > |\alpha|$$

και της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο, καταλήγουμε ότι

$$x(n) = (-1)^n u(n) + 2(-1)^{n-1}u(n-1)$$

δ) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}$, αιτιατή ακολουθία
Αναλύουμε σε απλά κλάσματα τη συνάρτηση ως εξής

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} + \frac{C}{(z+3)^2}$$

Με απαλοιφή παρονομαστών οδηγούμαστε στην ισότητα των πολυωνύμων

$$z = A(z+3)^2 + B(z-1)(z+3) + C(z-1)$$

από όπου προκύπτει ότι $A = \frac{1}{16}$, $B = -\frac{1}{16}$ και $C = \frac{3}{4}$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(z) = \frac{1}{16}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{16}\frac{z}{z+3} + \frac{3}{4}\frac{z}{(z+3)^2}$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z και τα ζεύγη

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-\alpha}\} = \alpha^n u(n), \quad |z| > |\alpha|$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}\} = n\alpha^n u(n), \quad |z| > |\alpha|$$

βρίσκουμε για την αιτιατή ακολουθία $h(n)$ ότι

$$h(n) = [\frac{1}{16} - \frac{1}{16}(-3)^n - \frac{1}{4}n(-3)^n]u(n)$$

1.10 Ένα πρωτης τάξης ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{6}x(n-1)$$

α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου

β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση του φίλτρου

γ) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε τη βηματική απόκριση του φίλτρου

δ) Δώστε το διάγραμμα μηδενικών-πόλων στο z-επίπεδο

ϵ) Εξηγήστε αν το φίλτρο είναι ευσταθές και γιατι

Λύση:

α) Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Z και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών και έχουμε

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = \frac{1}{3}X(z) + \frac{1}{6}z^{-1}X(z)$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς θα δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

β) Αναλύοντας την $H(z)$ σε απλά κλάσματα παίρνουμε ότι

$$H(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{6}z^{-1}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

οπότε, κάνοντας χρήση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Z, καταλήγουμε ότι η κρουστική απόκριση θα δίνεται από τη σχέση

$$h(n) = \frac{1}{3}\big(\frac{1}{2}\big)^n u(n) + \frac{1}{6}\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}u(n-1)$$

γ) Από το θεώρημα της συνέλιξης θα έχουμε ότι

$$S(z) = H(z)U(z) = H(z)\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

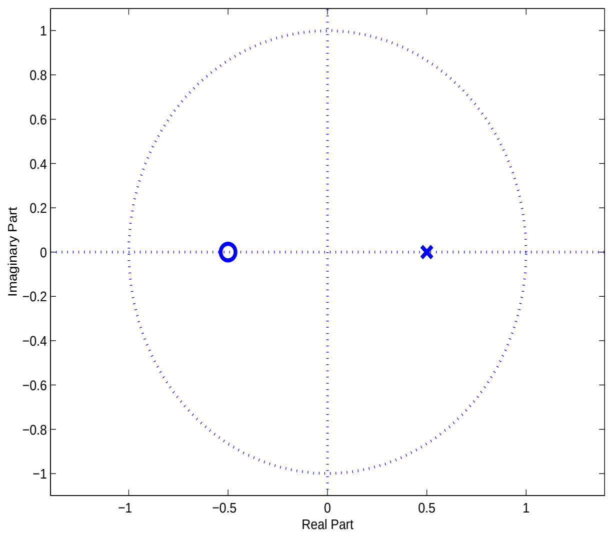
Γράφοντας την $S(z)$ στη μορφή

$$S(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

και κάνοντας την ανάλυση παίρνουμε ότι $A = -2/3$ και $B = 1$. Συνεπώς, κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z και γνωστών ζευγών μετασχηματισμού, βρίσκουμε ότι η βηματική απόκριση θα δίνεται από τη σχέση

$$s(n) = -\frac{2}{3}\big(\frac{1}{2}\big)^n u(n) + u(n) = [1 - \frac{2}{3}\big(\frac{1}{2}\big)^n]u(n)$$

δ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει μηδενικό στο $z = -1/2$ και πόλο στο $z = 1/2$. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση *zplane* του MATLAB, παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα



ϵ) Εφόσον το σύστημα είναι αιτιατό και όλοι οι πόλοι του είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, το φίλτρο είναι ευσταθές.

1.11 Η έξοδος ενός διακριτού ΓΧΑ συστήματος είναι

$$y(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$$

όταν η είσοδος σε αυτό είναι η βηματική ακολουθία $x(n) = u(n)$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση $h(n)$

Λύση:

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Z της εισόδου και της εξόδου του συστήματος έχουμε ότι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

οπότε η κρουστική απόκριση του συστήματος, σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, θα δίνεται από τη σχέση

$$h(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Βέβαια η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς τη χρήση του μετασηματισμού Z, εφόσον λάβουμε υπόψη ότι η έξοδος του συστήματος είναι η βηματική απόκριση, δηλαδή $y(n) = s(n)$. Η σχέση που συνδέει τη βηματική ακολουθία με την κρουστική ακολουθία είναι

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

όποτε η σχέση που συνδέει τη βηματική με την κρουστική απόκριση, θα είναι

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

από την οποία με αντικατάσταση, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

1.12 Να γενικευτεί το θεώρημα αρχικής τιμής ώστε να βρεθεί η τιμή μιας αιτιατής ακολουθίας $x(n)$ για $n = 1$ και να υπολογιστεί η τιμή $x(1)$, όταν

$$X(z) = \frac{2 + 6z^{-1}}{4 - 2z^{-2} + 13z^{-3}}$$

Λύση:

Αν η $x(n)$ είναι αιτιατή ακολουθία, τότε

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε το $x(0)$ από τη $X(z)$, έχουμε

$$X(z) - x(0) = x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής με το z, έχουμε

$$z[X(z) - x(0)] = x(1) + x(2)z^{-1} + \ldots$$

Αν υποθέσουμε ότι $z \to \infty$, το όριο που λαμβάνεται είναι η τιμή $x(1)$,

$$x(1) = \lim_{|z|\to\infty}\{z[X(z) - x(0)]\}$$

Για το συγκεκριμένο μετασχηματισμίο Z που δίνεται, βλέπουμε ότι είναι

$$x(0) = \lim_{|z|\to\infty} X(z) = \frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$z[X(z) - x(0)] = \frac{6 + z^{-1} - \frac{13}{2}z^{-2}}{4 - 2z^{-2} + 13z^{-3}}$$

και

$$x(1) = \lim_{|z|\to\infty} \{z[X(z) - x(0)]\} = \frac{3}{2}$$

1.13 Έστω $h(n)$ η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας όταν

α) $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

β) $h(n) = (\frac{1}{3})^{n+2}u(n-2)$

Λύση:

α) $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$
Το σύστημα αυτό έχει κρουστική απόκριση που είναι πεπερασμένη σε μήκος. Επομένως, η απόκριση συχνότητας είναι ένα πολυώνυμο του $e^{j\omega}$, με συντελεστές ίσους με τους συντελεστές της $h(n)$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 6e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega}$$

Αυτό μπορεί να δειχθεί τυπικότερα, γράφοντας

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)]e^{-jn\omega}$$

Επειδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0)e^{-jn\omega} = e^{-jn_0\omega}$$

προκύπτει ότι

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 6e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega}$$

β) $h(n) = (\frac{1}{3})^{n+2}u(n-2)$
Για το σύστημα αυτό η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n+2}e^{-jn\omega}$$

Αλλάζοντας τα όρια του αθροίσματος ώστε αυτό να να ξεκινά απο $n = 0$, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n+4}e^{-j(n+2)\omega} = (\frac{1}{3})^4 e^{-2j\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n$$

οποτε τελικά βρίσκουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

1.14 Η είσοδος που εφαρμόζεται σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι

$$x(n) = 2\cos\big(\frac{n\pi}{4}\big) + 3\sin\big(\frac{3n\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\big)$$

Να προσδιορισθεί η έξοδος του συστήματος, αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n) = 2\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{(n-1)\pi}$$

Λύση:

Αν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(n) = \cos(n\omega_0)$, η απόκρισή του θα είναι

$$y(n) = |H(e^{j\omega})|\cos(n\omega_0 + \phi(\omega_0))$$

Συνεπώς, πρέπει να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. Η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

είναι

$$h_1(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$

Επειδή $h(n) = 2h_1(n-1)$ με $\omega_c = \pi/2$, θα πρέπει να αναζητήσουμε μια έκφραση της $H(e^{j\omega})$ συναρτήσει της $H_1(e^{j\omega})$ ως εξής

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2h_1(n-1)e^{-jn\omega} \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)e^{-j(n+1)\omega} \\ &= 2e^{-j\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)e^{-jn\omega} \\ &= 2e^{-j\omega}H_1(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Άρα,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2e^{-j\omega} & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

με

$$\phi(\omega) = -\omega$$

Επειδή $|H(e^{j\omega})| = 0$ για $\omega = 3\pi/4$, ο ημιτονικός όρος της $x(n)$ αποκόπτεται από το σύστημα και η έξοδος είναι απλώς

$$\begin{aligned} y(n) &= 2|H(e^{j\pi/4})|\cos\big(\frac{n\pi}{4} + \phi(\frac{\pi}{4})\big) \\ &= 4\cos\big((n-1)\frac{\pi}{4}\big) \end{aligned}$$

1.15 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται απο τη εξίσωση διαφορών

$$y(n) = 0.5y(n-1) + bx(n)$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του b έτσι ώστε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $\omega = 0$ να είναι $H(e^{j0}) = 1$ και να βρεθεί το *σημείο ημίσειας ισχύος* (δηλαδή η συχνότητα στην οποία το $|H(e^{j\omega})|^2$ ισούται με το μισό της μεγιστης τιμής του, που λαμβάνεται για $\omega = 0$. Το σημείο αυτό αναφέρεται και ως $3dB$ σημείο γιατί σε dB κλίμακα, ο λόγος των τετραγώνων των μέτρων είναι ίσος με $-10log(1/2) = 3.01dB$).

Λύση:

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος που περιγράφεται από αυτή την εξίσωση διαφορών είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Επειδή

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{b^2}{(1-0.5e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})} = \frac{b^2}{1.25 - \cos(\omega)}$$

το $|H(e^{j\omega})|$ θα ισούται με 1 για $\omega = 0$, αν

$$\frac{b^2}{1.25 - 1} = 1$$

δηλαδή $b = \pm 0.5$ Για να βρεθεί το σημείο ημίσειας ισχύος,πρέπει να υπολογίσουμε τη συχνότητα για την οποία είναι

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{2}$$

Αυτό συμβαίνει όταν

$$\cos(\omega) = 0.75$$

η

$$\omega = 0.23\pi$$

1.16 Ένα *φίλτρο κινητού μέσου όρου* (moving average) L-τάξης, είναι ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο, για μια είσοδο $x(n)$, παράγει έξοδο της μορφής

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^{L} x(n-k)$$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού.

Λύση:

Αν η είσοδος στο φίλτρο κινητού μέσου όρου είναι η $x(n) = \delta(n)$, η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση. Επομένως,

$$h(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^{L} \delta(n-k)$$

και

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^{L} e^{-jk\omega}$$

Με χρήση γεωμετρικών προόδων, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\frac{1-e^{-j(L+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

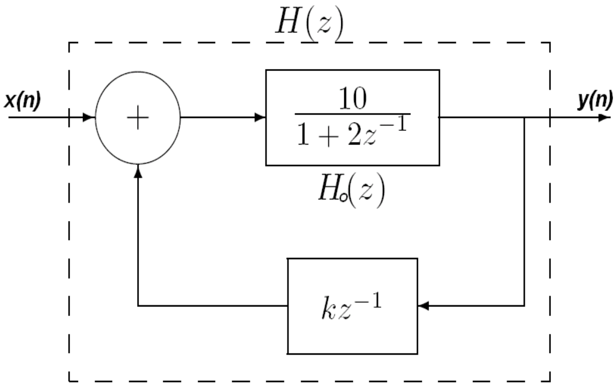
και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $e^{-j(L+1)\omega/2}$ από τον αριθμητή και τον όρο $e^{-j\omega/2}$ από τον παρονομαστή, καταλήγουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{e^{j(L+1)\omega/2}-e^{-j(L+1)\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega}/2}$$

ή

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{\sin\left(\frac{(L+1)\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

1.17 Δίνεται η παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων διακριτού χρόνου



α) Βρείτε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ της συνδεσμολογίας.

β) Αν τα δύο υποσυστήματα καθώς και το συνολικό σύστημα είναι αιτιατά, βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου k είναι το συνολικό σύστημα $H(z)$ ευσταθές.

γ) Αν σας ζητούσαν να επιλέξετε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου k ποια θα διαλέγατε και γιατί;

Λύση:

α) Αν καλέσουμε $r(n)$ την είσοδο στο υποσύστημα H_0 τότε $r(n) = x(n) + ky(n-1)$. Μεταβαίνοντας στο πεδίο Z ισχύει ότι

$$Y(z) = H_0(z)R(z) = H_0(z)(X(z) + kz^{-1}Y(z))$$

όπου $H_0(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του υποσυστήματος. Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς $Y(z)$ και διαιρώντας με $X(z)$ προκύπτει ότι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_0(z)}{1-kz^{-1}H_0(z)} = \frac{10}{1+(2-10k)z-1}$$

β) Αφού το συνολικό σύστημα είναι αιτιατό, θα είναι ευσταθές αν οι πόλοι του συστήματος είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Ο μοναδικός πόλος είναι ο $10k - 2$. Πρέπει επομένως $| 10k - 2 |< 1$, που σημαίνει ότι $0.1 < k < 0.3$.

γ) Η καλύτερη επιλογή για ευστάθεια, είναι αυτή που θα οδηγήσει τον πόλο στο κέντρο του μοναδιαίου κύκλου, αφού η επιλογή αυτή εξαφανίζει κάθε είδους ταλαντώσεις του συστήματος, δηλαδή $k = 0.2$.

1.18 Σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη σωματιδίων. Κάθε ένα δευτερόλεπτο, ένα σωματίδιο α χωρίζεται σε οκτώ σωματίδια β και κάθε ένα από τα σωματίδια β, χωρίζεται με τη σειρά του σε ένα σωματίδιο α και δύο σωματίδια β. Αν βρίσκεται ένα μόνο σωματίδιο α στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, πόσα σωματίδια θα βρίσκονται μέσα στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $t = 100$;

Λύση:

Στην άσκηση αυτή πρέπει να ξεκινήσουμε καταγράφοντας με μαθηματικούς όρους, αυτό που συμβαίνει μέσα στον αντιδραστήρα. Έστω $\alpha(n)$ ο αριθμός των σωματιδίων α μέσα στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή n και $\beta(n)$ ο αριθμός των σωματιδίων β. Επειδή οκτώ σωματίδια β παράγονται από ένα σωματίδιο α και δύο από κάθε σωματίδιο β, έχουμε

$$\beta(n) = 8\alpha(n-1) + 2\beta(n-1)$$

Επίσης, επειδή ένα σωματίδιο α παράγεται από κάθε ένα σωματίδιο β, θα έχουμε

$$\alpha(n) = \beta(n-1)$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση παίρνουμε

$$\beta(n) = 8\beta(n-2) + 2\beta(n-1)$$

που είναι μια αναδρομική σχέση που καθορίζει τον αριθμό των σωματιδίων β που βρίσκονται μέσα στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή n σε σχέση με τις χρονικές στιγμές $n-1$ και $n-2$. Επειδή βρίσκεται ένα μόνο σωματίδιο α στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $n = 0$, έπεται ότι τη χρονική στιγμή $n = 1$, θα βρίσκονται μέσα στον αντιδραστήρα οκτώ σωματίδια β. Συνεπώς, η τιμή της αρχικής συνθήκης που συνδέεται με την ακολουθία $\beta(n)$ είναι $\beta(1) = 8$, η οποία μπορεί να ενσωματωθεί στην σχέση ως εξής:

$$\beta(n) = 8\beta(n-2) + 2\beta(n-1) + 8\delta(n-1) \quad n \geq 1$$

με $\beta(n) = 0$ για $n < 1$. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Ζ, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς $B(z)$, οπότε

$$B(z) = \frac{8z^{-1}}{1 - 2z^{-1} - 8z^{-2}}$$

Αν στην παραπάνω συνάρτηση κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$B(z) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - 4z^{-1}} - \frac{\frac{4}{3}}{1 + 2z^{-1}}$$

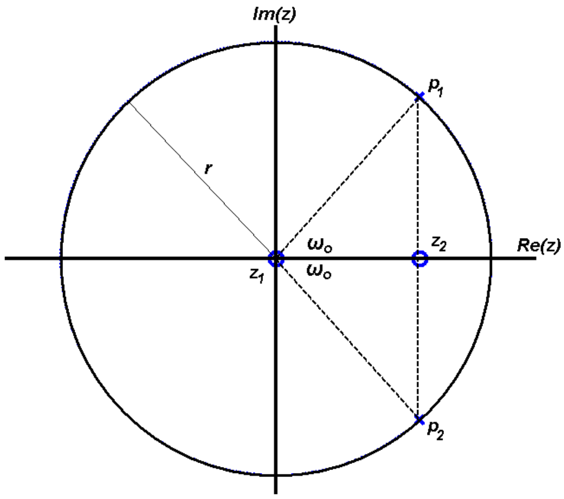
Με αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ καταλήγουμε ότι

$$\beta(n) = \frac{4}{3}4^n u(n) - \frac{4}{3}(-2)^n u(n)$$

Επειδή ο αριθμός των σωματιδίων α τη χρονική στιγμή n ισούται με τον αριθμό των σωματιδίων β τη χρονική στιγμή $n-1$, ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων τη χρονική στιγμή $n = 100$, είναι

$$N = \beta(100) + \beta(99) = \frac{4}{3}[4^{100} - (-2)^{100} + 4^{99} - (-2)^{99}] = \frac{4}{3}[5 \cdot 4^{99} - 2^{99}]$$

1.19 Δίνεται το ακόλουθο σχήμα. Αν $z_1,\ z_2$ μηδενικά και $p_1,\ p_2$ πόλοι της συνάρτησης $X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $|z| > r$, να υπολογιστεί η ακολουθία $x(n)$.



Λύση:
Εφόσον έχουμε δύο μηδενικά και δύο πόλους, η συνάρτηση $X(z)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Από το σχήμα, αφού οι πόλοι βρίσκονται πάνω στο κύκλο ακτίνας r θα έχουμε

$$p_1 = re^{j\omega_0}$$

και

$$p_2 = re^{-j\omega_0}$$

ενώ για τα μηδενικά $z_1,\ z_2$ παίρνουμε ότι

$$z_1 = 0$$

και

$$z_2 = r\cos(\omega_0)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στον τύπο της $X(z)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z(z - r\cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \\ &= \frac{z^2 - r\cos(\omega_0)z}{z^2 - (re^{j\omega_0} + re^{-j\omega_0})z + re^{j\omega_0}re^{-j\omega_0}} \\ &= \frac{z^2 - r\cos(\omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\omega_0)z + r^2} \\ &= \frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}} \end{aligned}$$

η οποία αποτελεί μετασχηματισμό Z γνωστής συνάρτησης και σε συνδυσμό με το γεγονός ότι η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > r$, καταλήγουμε ότι η ακολουθία $x(n)$ θα είναι

$$x(n) = \left[r^n\cos(\omega_0)\right]u(n)$$