
Δ' Σετ ασκήσεων

1.1 Προσδιορίστε ποια από τα σήματα που δίνονται παρακάτω είναι περιοδικά. Για όσα είναι περιοδικά, υπολογίστε την θεμελιώδη περίοδο

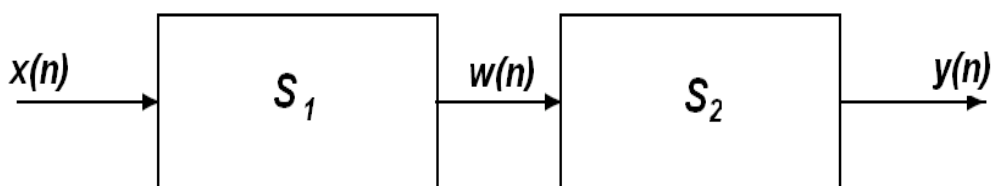
α) $x(n) = \cos(0.125\pi n)$

β) $x(n) = \operatorname{Re}\{e^{jn\pi/12}\} + \operatorname{Im}\{e^{jn\pi/18}\}$

γ) $x(n) = \sin(\pi + 0.2n)$

δ) $x(n) = e^{j\pi n/16} \cos(n\pi/17)$

1.2 Θεωρείστε τη σύνδεση σε σειρά (cascade) δύο συστημάτων S_1 και S_2 όπως φαίνονται στο σχήμα



- α) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά και ευσταθή, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αιτιατό και ευσταθές;
- β) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι μη γραμμικά, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα μη γραμμικό;
- γ) Αν και τα δύο συστήματα είναι χρονικά αμετάβλητα, θα αποτελεί η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα επίσης χρονικά αμετάβλητο;

1.3 Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια τα παρακάτω συστήματα, τα οποία περιγράφονται είτε μέσω της σχέσης εισόδου-εξόδου, είτε μέσω της κρουστικής τους απόκρισης.

$$\alpha) y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$\beta) y(n) = \log(1 + |x(n)|)$$

$$\gamma) h(n) = \frac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|}$$

$$\delta) h(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(-n)$$

1.4 Αν η απόκριση ενός γραμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος στη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι

$$s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

να βρεθεί η κρουστική απόκριση, $h(n)$.

1.5 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z και όπου υπάρχει, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου, καθεμιάς από τις παρακάτω ακολουθίες και να δοθεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών στο z-επίπεδο

$$\alpha) x(n) = \delta(n - 1)$$

$$\beta) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \text{ (δεξιιάς επέκτασης)}$$

$$\gamma) x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n - 1), \text{ (αριστερής επέκτασης)}$$

$$\delta) x(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

1.6 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z των ακολουθιών $y(n)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Z της $x(n)$

$$\alpha) y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$$

$$\beta) y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n - kN), \text{ όπου } x(n) \text{ μια ακολουθία μήκους με μη μηδενικές τιμές στο διάστημα } 0 \leq n \leq N - 1$$

1.7 Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα, υπολογίστε τον μετασχηματισμό Z των ακολουθιών

$$\alpha) x(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n - 2)$$

$$\beta) x(n) = \frac{1}{n}(-2)^{-n} u(-n - 1)$$

1.8 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Z της εξόδου του υπερδειγματολήπτη ως προς το μετασχηματισμό Z της εισόδου του. Στη συνέχεια υπολογίστε το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^{n/10} & n = 0, 10, 20, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

1.9 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\alpha) X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\beta) X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$\gamma) X(z) = \frac{z + 2}{z + 1}$$

$$\delta) X(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z + 3)^2}, \quad \text{αιτιατή ακολουθία}$$

1.10 Ένα πρώτης τάξης ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{6}x(n-1)$$

- α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου
- β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση του φίλτρου
- γ) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε τη βηματική απόκριση του φίλτρου
- δ) Δώστε το διάγραμμα μηδενικών-πόλων στο z-επίπεδο
- ε) Εξηγήστε αν το φίλτρο είναι ευσταθές και γιατί

1.11 Η έξοδος ενός διακριτού ΓΧΑ συστήματος είναι

$$y(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$$

όταν η είσοδος σε αυτό είναι η βηματική ακολουθία $x(n) = u(n)$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση $h(n)$

1.12 Να γενικευτεί το θεώρημα αρχικής τιμής ώστε να βρεθεί η τιμή μιας αιτιατής ακολουθίας $x(n)$ για $n = 1$ και να υπολογιστεί η τιμή $x(1)$, όταν

$$X(z) = \frac{2 + 6z^{-1}}{4 - 2z^{-2} + 13z^{-3}}$$

1.13 Έστω $h(n)$ η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας όταν

α) $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

β) $h(n) = (\frac{1}{3})^{n+2}u(n-2)$

1.14 Η είσοδος που εφαρμόζεται σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι

$$x(n) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(\frac{3n\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

Να προσδιορισθεί η έξοδος του συστήματος, αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n) = 2 \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{(n-1)\pi}$$

1.15 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται απο τη εξίσωση διαφορών

$$y(n] = 0.5y(n-1) + bx(n)$$

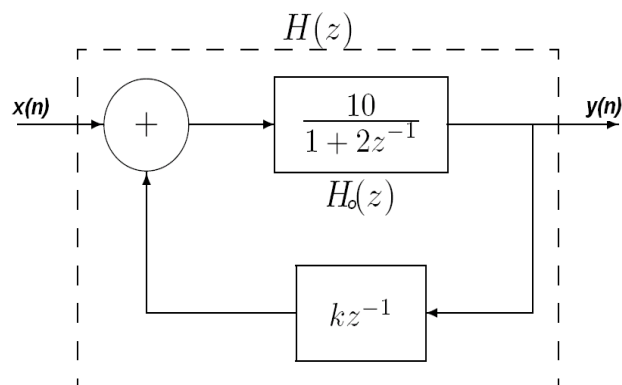
Να προσδιοριστεί η τιμή του b έτσι ώστε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $\omega = 0$ να είναι $H(e^{j0}) = 1$ και να βρεθεί το σημείο ημίσειας ισχύος (δηλαδή η συχνότητα στην οποία το $|H(e^{j\omega})|^2$ ισούται με το μισό της μεγίστης τιμής του, που λαμβάνεται για $\omega = 0$. Το σημείο αυτό αναφέρεται και ως $3dB$ σημείο γιατί σε dB κλίμακα, ο λόγος των τετραγώνων των μέτρων είναι ίσος με $-10\log(1/2) = 3.01dB$).

1.16 Ένα φίλτρο κινητού μέσου όρου (moving average) L -τάξης, είναι ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο, για μια είσοδο $x(n)$, παράγει έξοδο της μορφής

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L x(n-k)$$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού.

1.17 Δίνεται η παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων διακριτού χρόνου



- α) Βρείτε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ της συνδεσμολογίας.
- β) Αν τα δύο υποσυστήματα καθώς και το συνολικό σύστημα είναι αιτιατά, βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου k είναι το συνολικό σύστημα $H(z)$ ευσταθές.
- γ) Αν σας ζητούσαν να επιλέξετε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου k ποια θα διαλέγατε και γιατί;

1.18 Σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη σωματιδίων. Κάθε ένα δευτερόλεπτο, ένα σωματίδιο α χωρίζεται σε οκτώ σωματίδια β και κάθε ένα από τα σωματίδια β , χωρίζεται με τη σειρά του σε ένα σωματίδιο α και δύο σωματίδια β . Αν βρίσκεται ένα μόνο σωματίδιο α στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, πόσα σωματίδια θα βρίσκονται μέσα στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $t = 100$;

1.19 Δίνεται το ακόλουθο σχήμα. Αν z_1, z_2 μηδενικά και p_1, p_2 πόλοι της συνάρτησης $X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $|z| > r$, να υπολογιστεί η ακολουθία $x(n)$.

