Λύσεις Γ' Σετ ασκήσεων

1.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων και σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης

α) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

β) $x(t) = -e^{-\alpha t}u(t)$

γ) $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$,

δ) $x(t) = e^{-b|t|}$

Λύση:

α) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

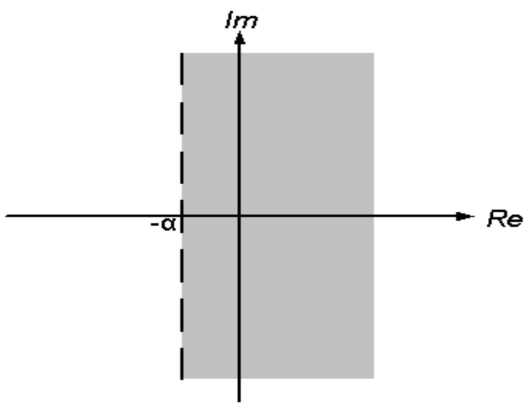
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αμφίπλευρου ML έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a}\end{aligned}$$

και για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να ισχύει

$$\Re e\{s\} > -\alpha$$

Η περιοχή σύγκλισης για $\alpha > 0$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Προφανώς, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι ο ίδιος, αφού στην $x(t)$ εμφανίζεται η $u(t)$.

$\beta)$ $x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$

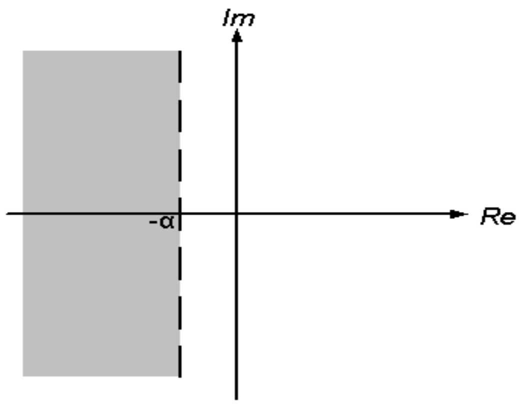
Ομοίως εφαρμόζουμε τον ορισμό του αμφίπλευρου ML και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(-t)e^{-st}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a}\end{aligned}$$

και για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να ισχύει

$$\Re e\{s\} < -\alpha$$

Η περιοχή σύγκλισης για $\alpha > 0$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ οι συναρτήσεις $\alpha)$ και $\beta)$ έχουν τον ίδιο ML, η περιοχή σύγκλισής τους είναι διαφορετική. Αν υπολογίσουμε τον μονοπλευρο μετασχηματισμό Laplace, τότε εξαιτίας της $u(-t)$ θα είναι ίσος με μηδεν.

$\gamma)$ $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

Σύμφωνα με το ερώτημα $\alpha)$, οι ML των εκθετικών όρων θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

και

$$\mathcal{L}\{e^{2t}u(t)\} = \frac{1}{s-2}, \quad \Re e\{s\} > 2$$

ενώ για την κρουστική συνάρτηση έχουμε

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1, \quad \Re e\{s\} > -\infty$$

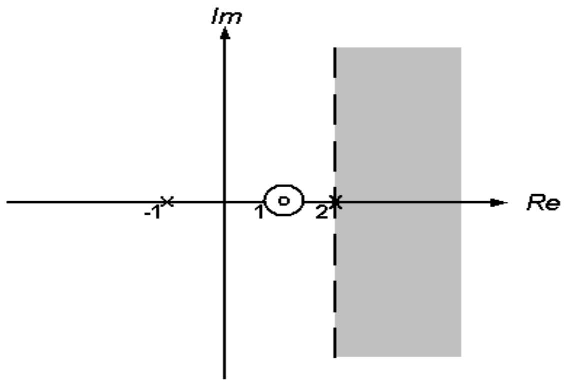
Επομένως, ο ML της συνάρτησης $x(t)$ θα είναι

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}, \quad \Re e\{s\} > 2$$

δηλαδή

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re e\{s\} > 2$$

όπου η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των περιοχών, ώστε να συγκλίνουν όλα τα ολοκληρώματα, δηλαδή

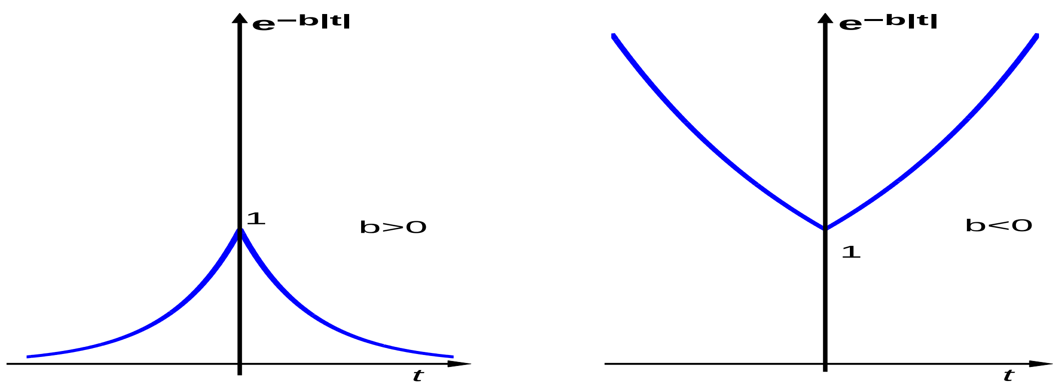


Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης. Επειδή ο μονόπλευρος κι ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός των επιμέρους συναρτήσεων συμπίπτουν, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός της $x(t)$ θα είναι ο ίδιος με τον αμφίπλευρο.

δ) $x(t) = e^{-b|t|}$

Η συνάρτηση $x(t)$, η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παίρνει τιμές μη μηδενικές για οποιαδήποτε τιμή του t. Επομένως μπορούμε να τη γράψουμε ως άθροισμα δύο συναρτήσεων που η μία παίρνει μη μηδενικές τιμές για $t < 0$ και η άλλη για $t > 0$, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$



Σύμφωνα με το α) θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{e^{-bt}u(t)\} = \frac{1}{s+b}, \quad \Re e\{s\} > -b$$

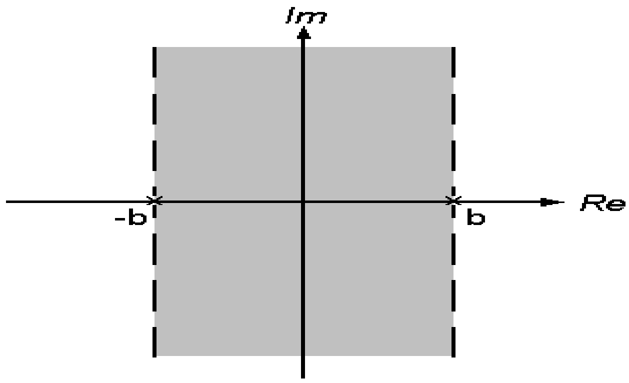
ενώ σύμφωνα με το β)

$$\mathcal{L}\{e^{bt}u(-t)\} = \frac{-1}{s-b}, \quad \Re e\{s\} < b$$

Προφανώς, αν $b \leq 0$, ο ML δεν υπάρχει, αφού δεν υπάρχει περιοχή για την οποία να συγκλίνουν και τα δύο ολοκληρώματα. Άρα, αν $b > 0$, τότε ο ML της συνάρτησης είναι

$$\mathcal{L}\{e^{-b|t|}\} = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2-b^2}, \quad -b < \Re e\{s\} < b$$

και η περιοχή σύγκλισης μαζί με τους πόλους της συνάρτησης, φαίνονται στο επόμενο σχήμα



Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, τότε θα πάρουμε το αποτέλεσμα του α).

1.2 Να αποδείξετε ότι

α) $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

β) $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

γ) $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

δ) $\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

Λύση:

α) $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

Από το ζεύγος μετασχηματισμού

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}, \quad \Re e\{s\} > \Re e\{c\}$$

πρόκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{s-j\omega_0}$$
$$\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t}\} = \frac{1}{s+j\omega_0}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega_0} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > 0\end{aligned}$$

β) $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} &= \frac{1}{2j}\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s + j\omega_0} \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > 0\end{aligned}$$

γ) $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$

Σύμφωνα με το α) και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στη συχνότητα, παίρνουμε ότι

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

δ) $\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα και το ζεύγος του α) μπορούμε να πούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right) \\ &= -\frac{s^2 + \omega_0^2 - 2s^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \\ &= \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad \Re e\{s\} > 0\end{aligned}$$

1.3 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

α) $x(t) = u(t) - u(t - 1)$

β) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT)$

γ) $x(t) = t^n u(t)$,

δ) $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)u(t)$

Λύση:

α) $x(t) = u(t) - u(t-1)$

Υπολογίζουμε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace (ο οποίος συμπίπτει με τον αμφίπλευρο, όπως και στις υπόλοιπες συναρτήσεις) και έχουμε για τον κάθε όρο ότι

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

και από την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{u(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης, έχουμε

$$\mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}, \quad \Re e\{s\} > -\infty$$

Παρατηρούμε βέβαια ότι, αφού η συνάρτηση είναι πεπερασμένης διάρκειας, η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το επίπεδο του s (αν και οι επιμέρους συναρτήσεις δεν έχουν ML για οποιαδήποτε τιμή του s).

β) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT), \quad (T>0)$

Ο μονόπλευρος ML της συνάρτησης είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathcal{L}\{\delta(t-kT)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-skT} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-sT})^k \end{aligned}$$

Προφανώς, αφού $T > 0$, η σειρά συγκλίνει όταν

$$|\ \alpha e^{-sT}\ | < 1 \Leftrightarrow e^{-\sigma T} < \frac{1}{|\ \alpha\ |} \Leftrightarrow \sigma > \frac{\ln \alpha}{T}$$

Επομένως,

$$X(s) = \frac{1}{1-\alpha e^{-sT}}, \qquad \Re e\{s\} > \frac{\ln \alpha}{T}$$

γ) $x(t) = t^n u(t)$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = (-1)^n \frac{d^n(s^{-1})}{ds^n}$$

κι επειδή

$$\frac{d^n(s^{-1})}{ds^n} = (-1)(-2)\ldots(-n)s^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$$

θα έχουμε τελικά

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{(-1)^{2n} n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

δ) $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)u(t)$

Χρησιμοποιώντας τη τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(\omega_0 t + \phi) = \cos(\omega_0 t)\cos(\phi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\phi)$$

και την αρχή της υπέρθεσης, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\} &= \cos(\phi)\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} - \sin(\phi)\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)u(t)\} \\
&= \cos(\phi)\frac{s}{s^2+\omega_0^2} - \sin(\phi)\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \\
&= \frac{s\cos(\phi) - \omega_0 \sin(\phi)}{s^2+\omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > 0
\end{aligned}$$

1.4 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML των συναρτήσεων

α) $X(s) = \dfrac{1}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$

β) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$

γ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}, \quad \Re e\{s\} > 1,$

δ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$

Λύση:

α) $X(s) = \dfrac{1}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$

Από τον πίνακα των στοιχειωδών συναρτήσεων, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)u(t)\} = \frac{3}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι η

$$x(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)u(t)$$

β) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$

Αναλύοντας τη ρητή συνάρτηση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

όπου

$$A = (s+2)X(s)\big|_{s=-2} = -1$$
$$B = (s+3)X(s)\big|_{s=-3} = 2$$

Επομένως, αφού $\Re e\{s\} > -2$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3}\} = (-e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

γ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}, \quad \Re e\{s\} > 1,$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε στον παρονομαστή μια διπλή ρίζα, οπότε η διάσπαση σε απλά κλάσματα γίνεται ως εξής

$$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2}$$

όπου

$$A = (s-1)X(s)\big|_{s=1} = 1$$
$$C = s^2X(s)\big|_{s=0} = -1$$
$$B = \frac{d}{ds}\left[s^2X(s)\right]_{s=0} = 0$$

Συνεπώς, ο ML γράφεται στη μορφή

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2}$$

και αφού $\Re e\{s\} > 1$

$$x(t) = (e^t - t)u(t)$$

δ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$

Τη συνάρτηση αυτή μπορούμε να τη γράψουμε

$$X(s) = \frac{(s+1)^2 - 3s}{(s+1)^2}$$

οπότε απλοποιείται στη μορφή

$$X(s) = 1 - \frac{3s}{(s+1)^2}$$

Για τον δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της παραπάνω εξίσωσης, μπορούμε είτε να κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα είτε να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες του ML. Συγκεκριμένα ξεκινώντας από το ζεύγος

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα, παίρνουμε ότι

$$\mathcal{L}\{e^{-t}tu(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

Επίσης, από την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big[e^{-t}tu(t)\big]\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)\right\} = \frac{s}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

Επομένως, η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι η

$$\begin{aligned} x(t) &= \delta(t) - 3e^{-t}u(t) + 3te^{-t}u(t) \\ &= \delta(t) + 3(t-1)e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

1.5 Θεωρείστε ένα ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x(t) = e^{-t}u(t)$ και το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$

α) Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των $x(t),\ h(t)$

β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης βρείτε το ML $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$

γ) Από το ML $Y(s)$ καθορίστε την έξοδο $y(t)$

δ) Υπολογίστε την έξοδο $y(t)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης

Λύση:

α) Χρησιμοποιώντας το ζεύγος μετασχηματισμού

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}, \quad \Re e\{s\} > \Re e\{c\}$$

έχουμε ότι

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

και

$$H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2$$

β) Αφού έχουμε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα θα ισχύει ο τύπος της συνέλιξης, οπότε στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας θα έχουμε

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

γ) Αναλύουμε τον $Y(s)$ σε απλά κλάσματα, οπότε αρχικά, το γράφουμε στη μορφή

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= (s+1)Y(s)\big|_{s=-1} = 1 \\ B &= (s+2)Y(s)\big|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

'Αρα, ο ML γράφεται ως

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και επομένως

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

δ) Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της συνέλιξης, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}e^{2\tau}d\tau \\ &= e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{\tau}d\tau \\ &= e^{-2t}\big[e^{\tau}\big]_0^t \\ &= (e^{-t}-e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

το οποίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα του γ)

1.6 'Ενα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

α) Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι η $x(t) = e^{2t}$, η έξοδος είναι η $y(t) = (1/6)e^{2t}$.

β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

όπου b μια άγνωστη σταθερά. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

Λύση:
Εφαρμόζοντας μονόπλευρο ML σε κάθε μέλος της διαφορικής εξίσωσης, έχουμε

$$sH(s) - h(0^-) + 2H(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{b}{s}$$

κι επειδή το σύστημα είναι αιτιατό και προφανώς $h(0^-) = 0$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$H(s) = \frac{(b+1)s+4b}{s(s+2)(s+4)}$$

Την τελευταία εξίσωση τη γράφουμε σαν άθροισμα απλών κλασμάτων οπότε

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= sH(s)\big|_{s=0} = \frac{b}{2} \\ B &= (s+2)H(s)\big|_{s=2} = -\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \\ C &= (s+4)H(s)\big|_{s=4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$H(s) = \frac{b}{2s} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{2}}{s+4}$$

και η συνάρτηση στο χρόνο θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{b}{2}u(t) + [\frac{1-b}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}]u(t) \\ &= [\frac{b}{2} + \frac{1-b}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}]u(t) \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος, όταν στην εισόδο του εφαρμόζεται το σήμα $x(t) = e^{2t}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2(t-\tau)}[\frac{b}{2} + \frac{1-b}{2}e^{-2\tau} - \frac{1}{2}e^{-4\tau}]u(\tau)d\tau \\ &= e^{2t}\big[-\frac{b}{4}e^{-2\tau} + \frac{b-1}{2}e^{-4\tau} + \frac{1}{12}e^{-6\tau}\big]_0^{\infty} \\ &= e^{2t}\big[\frac{b}{4} + \frac{1-b}{8} - \frac{1}{12}\big], \qquad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

κι εφόσον η έξοδος είναι η $y(t) = (1/6)e^{2t}$, τότε

$$\frac{b}{4} + \frac{1-b}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

δηλαδή $b = 1$. 'Αρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι η

$$H(s) = \frac{2}{s(s+4)}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

1.7 Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t).$$

α) Αν

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} - h(t),$$

πόσους πόλους έχει η συνάρτηση μεταφορας $G(s)$;

β) Για ποιες πραγματικές τιμές της πραγματικής παραμέτρου α το σύστημα S είναι ευσταθές;

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και υποθέτοντας ότι αρχικά το σύστημα ηρεμεί, έχουμε ότι

$$s^3Y(s) + (1+\alpha)s^2Y(s) + \alpha(1+\alpha)sY(s) + \alpha^2Y(s) = X(s).$$

δηλαδή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2}$$

Επειδή

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} - h(t),$$

τότε ο ML της $g(t)$ λόγω αιτιατότητας θα δίνεται από τη σχέση

$$G(s) = sH(s) - H(s) = \frac{s-1}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + \alpha(1+\alpha)s + \alpha^2}$$

Ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς παραγοντοποιείται και τελικώς παίρνει τη μορφή

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s^2 + \alpha s + \alpha^2)}.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $G(s)$ έχει τρείς πόλους, έναν πραγματικό (τον -1) και δύο συζυγείς μιγαδικούς, των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από την παράμετρο α.

$\beta)$ Γενικά, για να είναι το σύστημα S ευσταθές, θα πρέπει οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο πόλος στο -1, προφανώς δεν δημιουργεί πρόβλημα. Αφού το α είναι πραγματικό, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $s^2 + \alpha s + \alpha^2 = 0$ έχει διακρίνουσα αρνητική. Επομένως, η τετραγωνική της ρίζα θα είναι πολλαπλάσιο του j και οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι μιγαδικές. Το πραγματικό μέρος όμως των ριζών, θα είναι $-\alpha/2$ οπότε για να είναι το σύστημα S ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει $\alpha > 0$.Τι γίνεται αν το α είναι μιγαδικός αριθμός;

1.8 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4\delta(t) + 2u(t) - 3u(t-1)$$

και οι αρχικές συνθήκες $y(0^-) = y'(0^-) = 0$

$\alpha)$ Βρείτε τις τιμές $y(0^+),\ y'(0^+)$

$\beta)$ Βρείτε την $y(t)$

Λύση:

$\alpha)$ Εφαρμόζουμε ML στην διαφορική εξίσωση οπότε

$$2[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 4[sY(s) - y(0^-)] + 4Y(s) = 4 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s}e^{-s}$$

ή

$$2s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = 4 + \frac{2}{s} - \frac{3e^{-s}}{s}$$

ή

$$Y(s) = \frac{4s + 2 - 3e^{-s}}{2s^3 + 4s^2 + 4s}$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{4s + 2 - 3e^{-s}}{2s^3 + 4s^2 + 4s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{4s+2}{2s^3 + 4s^2 + 4s} - \lim_{s\to\infty} \frac{3e^{-s}}{2s^3 + 4s^2 + 4s} \\ &= 0 + \frac{0}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
y'(0^+) &= \lim_{s\to\infty} s[sY(s) - y(0^-)] = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{4s+2-3e^{-s}}{2s+4+4s^{-1}} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{4s+2}{2s+4+4s^{-1}} - \lim_{s\to\infty} \frac{3e^{-s}}{2s+4+4s^{-1}} \\
&= \frac{4}{2} - \frac{0}{\infty} = 2
\end{aligned}$$

β) Για να υπολογίσουμε την $y(t)$ χρησιμοποιούμε το ML $Y(s)$ και ακολουθούμε τη γνωστή δια-διακασία

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{4s+2-3e^{-s}}{2s^3+4s^2+4s} \\
&= \frac{2s}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s(s^2+2s+2)} - \frac{3}{2}\frac{e^{-s}}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{2}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s[(s+1)^2+1]} - \frac{3}{2}\frac{e^{-s}}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του ζεύγους

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

θα έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2+1}\} = 2e^{-t}\sin(t)$$

και σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{2}\frac{e^{-s}}{(s+1)^2+1}\} = \frac{3}{2}2e^{-(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)$$

Το δεύτερο όρο το γράφουμε στη μορφή

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{(s+1)^2+1} + \frac{C}{s}$$

και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε $A=-1/2,\ B=-1,\ C=1/2$. Δηλαδή

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = -\frac{1}{2}\frac{s}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2s}$$

ή

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = -\frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2s}$$

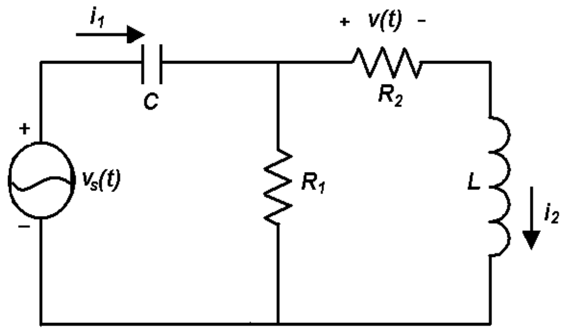
οπότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s[(s+1)^2+1]}\} = -\frac{1}{2}e^{-t}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$y(t) = e^{-t}[\frac{3}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}e\sin(t-1)u(t-1)] + \frac{1}{2}$$

1.9 Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα με αρχικές συνθληκες $v_C(0^-)$ και $i_L(0^-)$



α) Υπολογίστε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace $V(s)$ της $v(t)$

β) Θεωρώντας ως έξοδο την τάση $v(t)$ και ως είσοδο την τάση της γεννήτριας $v_s(t)$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος $H(s)$

Λύση:

α) 'Εστω $i_1(t)$, $i_2(t)$ τα ρεύματα που διαρέουν τον αριστερό και δεξιό βρόχο αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε του κανόνες Kirchhoff (η μιγαδική αντίσταση του πηνίου είναι Ls και του πυκνωτή $\frac{1}{Cs}$) στο κύκλωμα για τους δύο βρόχους και παίρνουμε

<u>$1^{\text{ος}}$ βρόχος:</u>

$$V_s(s) - \frac{1}{Cs}I_1(s) - \frac{1}{s}v_C(0^-) - R_1[I_1(s) - I_2(s)] = 0$$

ή

$$I_2(s) = -\frac{1}{R_1}V_s(s) + \frac{1}{R_1 s}v_C(0^-) + (1 + \frac{1}{R_1 Cs})I_1(s)$$

<u>$2^{\text{ος}}$ βρόχος:</u>

$$R_1[I_1(s) - I_2(s)] + Li_L(0^-) - (R_2 + Ls)I_2(s) = 0$$

ή

$$I_1(s) = -\frac{1}{R_1}(R_1 + R_2 + Ls)I_2(s) - \frac{1}{R_1}i_L(0^-)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και λύνοντας ως προς $I_2(s)$ (αφού ζητούμε το $V(s) = R_2 I_2(s)$), παίρνουμε

$$I_2(s) = \frac{R_1 CsV_s(s)}{LR_1Cs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2} + \frac{L(1 + R_1Cs)i_L(0^-) - R_1Cv_C(0^-)}{LR_1Cs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2}$$

και τελικά

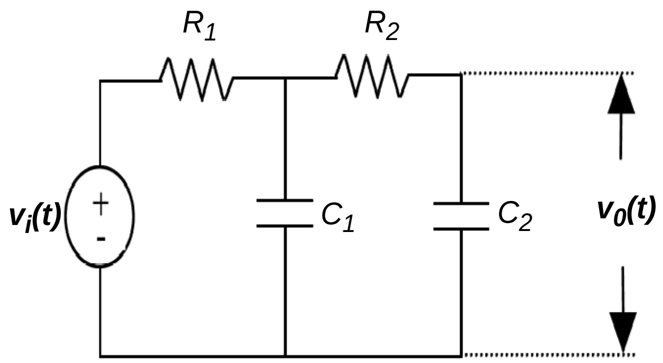
$$V(s) = \frac{R_1R_2CsV_s(s)}{LR_1Cs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2} + \frac{LR_2(1 + R_1Cs)i_L(0^-) - R_1R_2Cv_C(0^-)}{LR_1Cs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2}$$

Γενικότερα, η απόκριση ενός συστήματος είναι συνάρτηση της εισόδου του συστήματος και της αρχικής του κατάστασης. Στην περίπτωση όπου αρχικά το σύστημα ηρεμεί (μηδενικές αρχικές συνθήκες), έχουμε μόνο την επιδραση της εισόδου (εδώ την πρώτη ρητή συνάρτηση) και η απόκριση σε αυτήν την περίπτωση αναφέρεται ως απόκριση μηδενικής κατάστασης (*zero-state response*). Στην περίπτωση που στο σύστημα επιδρούν μόνο οι αρχικές συνθήκες και έχουμε μηδενική είσοδο, τότε στον παραπάνω τύπο, θα υπάρχει μόνο η δευτερη ρητή συνάρτηση και η απόκριση στην περίπτωση αυτή ονομάζεται απόκριση μηδενικής εισόδου (*zero-input response*).

β) Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος, θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε

$$H(s) = \frac{V(s)}{V_s(s)} = \frac{R_1R_2Cs}{LR_1Cs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2}$$

1.10 Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος μεταξύ της πηγής $v_i(t)$ (είσοδος) και της τάσης $v_0(t)$ (έξοδος)

β) Γράψτε κι επιλύστε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά της τάσης $v_0(t)$, όταν $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$, $v_i(t) = u(t)$ και η αρχική τάση στα άκρα του πρώτου πυκνωτή είναι 1 ενώ του δευτέρου είναι 0, $(v_{C_1}(0^-) = 1,\ v_{C_2}(0^-) = 0)$.

Λύση:

α) Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, αντικαθιστούμε τα στοιχεία με τις μιγαδικές τους αντιστάσεις και εφαρμόζουμε κανόνες Kirchhoff στους δύο βρόχους. Συνεπώς για τον πρώτο βρόχο έχουμε

$$-V_i(s) + R_1I_1(s) + \frac{1}{sC_1}(I_1(s) - I_2(s)) = 0$$

ενώ για το δεύτερο

$$\frac{1}{sC_1}(I_1(s) - I_2(s)) + (R_2 + \frac{1}{sC_2})I_2(s) = 0$$

Λύνοντας ως προς $I_2(s)$ από το σύστημα των δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους καταλήγουμε

$$I_2(s) = \frac{V_i(s)sC_2}{1 + sC_1R_1 + sC_2R_1 + sC_2R_2 + s^2C_1C_2R_1R_2}$$

Αφού $V_0(s) = I_2(s)/sC_2$, η συνάρτηση μεταφοράς θα δίνεται από τη σχέση

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sC_1R_1 + sC_2R_1 + sC_2R_2 + s^2C_1C_2R_1R_2}$$

$\beta)$ Αντικαθιστώντας στη σχέση που μας δίνει τη συνάρτηση μεταφοράς τις τιμές που μας δίνονται, παίρνουμε

$$s^2 V_0(s) + 3sV_0(s) + V_0(s) = V_i(s)$$

Γυρίζοντας στο πεδίο του χρόνου, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{d^2 v_0(t)}{dt^2} + 3\frac{dv_0(t)}{dt} + v_0(t) = u(t)$$

η οποία αποτελεί τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τάση $v_0(t)$. Επιπλέον, χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες, $v_0(0)$, $\frac{dv_0(0)}{dt}$ από τις οποίες γνωρίζουμε μόνο την τιμή της πρώτης $v_0(0) = 0$. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο $\frac{dv_0(0)}{dt}$, παρατηρούμε ότι η σχέση τάσης-ρεύματος στα άκρα του δεύτερου πυκνωτή είναι $i_2(t) = C_2\frac{dv_0(0)}{dt}$, δηλαδή $\frac{dv_0(0)}{dt} = \frac{i_2(0)}{C_2}$ κι επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το ρεύμα $i_2(0)$. Από το νόμο των τάσεων στο δεύτερο βρόχο για τη χρόνιή στιγμή $t = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$-v_1(0) + R_2 i_2(0) + v_0(0) = 0$$

όπου $v_1(t)$ η τάση στα άκρα του πρώτου πυκνωτή. Μετά από αντικατάσταση των τιμών έχουμε $i_2(0) = 1$, οπότε $\frac{dv_0(0)}{dt} = 1$

Για να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση, εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace, που μας δίνει

$$\left\{s^2 V_0(s) - sv_0(0) - \frac{dv_0(0)}{dt}\right\} + 3\left\{sV_0(s) - v_0(0)\right\} + V_0(s) = \frac{1}{s}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες και λύνοντας ως προς $V_0(s)$ καταλήγουμε

$$V_0(s) = \frac{s+1}{s(s^2+3s+1)}$$

Στη συνέχεια, για να βρούμε τη συνάρτηση στο χρόνο ακολουθούμε τη διαδικασία της ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Καταρχάς, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί

$$V_0(s) = \frac{1}{s^2+3s+1} + \frac{1}{s(s^2+3s+1)}$$

Αν $\rho_1,\ \rho_2$ οι ρίζες του τριωνύμου $s^2 + 3s + 1$, οι οποίες είναι πραγματικές, τότε το πρώτο κλάσμα μπορεί να γραφεί

$$\frac{1}{s^2+3s+1} = \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{s-\rho_1} + \frac{\frac{1}{\rho_2-\rho_1}}{s-\rho_2}$$

ενώ το δεύτερο κλάσμα, μετά από ανάλυση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{1}{s(s^2+3s+1)} = \frac{\frac{1}{\rho_1\rho_2}}{s} + \frac{\frac{1}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}}{s-\rho_1} + \frac{\frac{1}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}}{s-\rho_2}$$

Άρα, η συνάρτηση $v_0(t)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$v_0(t) = \left(\frac{\rho_1+1}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}e^{\rho_1 t} + \frac{\rho_2+1}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}e^{\rho_2 t} + \frac{1}{\rho_1\rho_2}\right)u(t)$$

κι αν αντικαταστήσουμε τα $\rho_1,\ \rho_2$ με τις τιμές τους, $\rho_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ \rho_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ παίρνουμε το επιθυμητό σήμα.

1.11 Σχεδιάστε την απευθείας(direct), την παράλληλη (parallel) και τη σε σειρά (cascade) υλοποίηση του συστήματος που περιγράφεται από την συνάρτηση

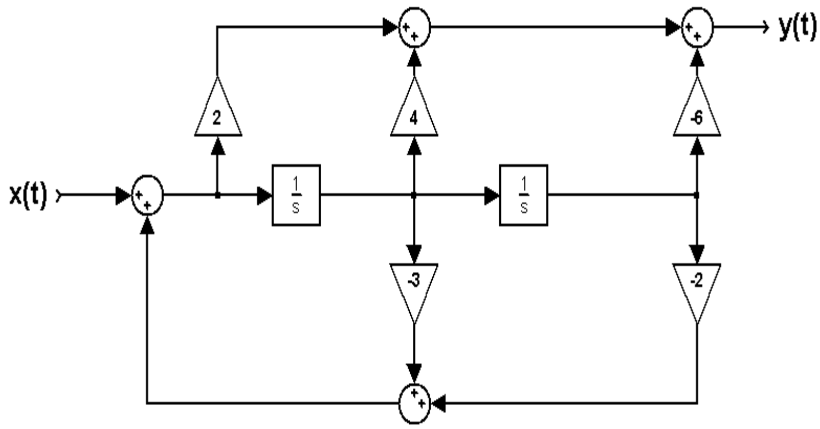
$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

Λύση:

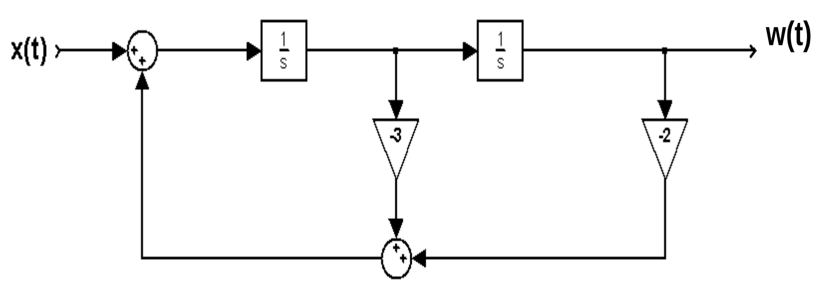
Γενικά, αν μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε διαφορική εξίσωση με μηδενικές αρχικές συνθήκες, μπορεί να γίνει προφανής η απευθείας υλοποίηση χρησιμοποιώντας ολοκληρωτές. Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση, η διαφορική εξίσωση είναι η

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x''(t) + 4x'(t) - 6x(t)$$

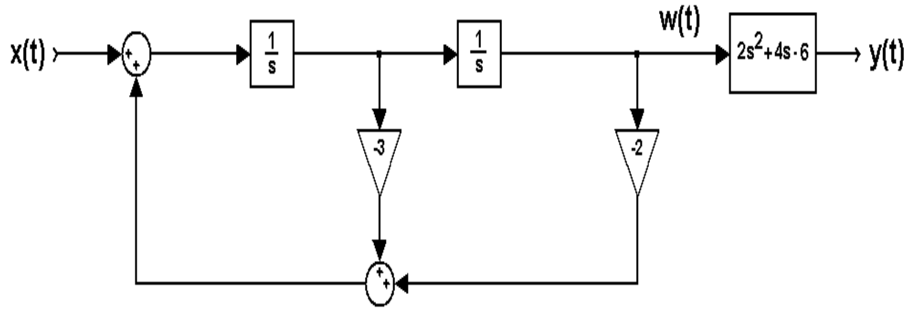
και η απευθείας υλοποίηση φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Για να γίνει πιο κατανοητή η υλοποίηση, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την $H(s)$ ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, της $\frac{1}{s^2+3s+2}$ και της $2s^2 + 4s - 6$, οπότε για την πρώτη, το σύστημα που την υλοποιεί είναι το εξής



Προφανώς, για να πάρουμε την $y(t)$ πρέπει η $w(t)$ να περάσει από ένα σύστημα με συνάρτηση $2s^2 + 4s - 6$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

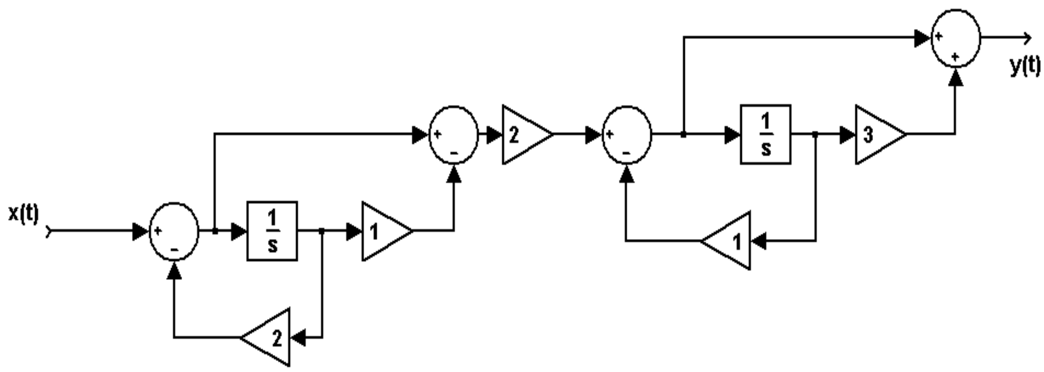


Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μόνο τον όρο $2s^2$ οπότε, αντί να στείλουμε το $w(t)$, το οποίο έχει περάσει απο δύο ολοκληρωτές ($\frac{1}{s^2}$), στο $2s^2$, μπορούμε απλώς να πολλαπλασιάσουμε με 2 το σήμα, πριν καν εισέρθει στον πρώτο ολοκληρωτή. Ακολουθώντας αυτή τη λογική, για να αποφύγουμε τα περιττά στη σειρά ζεύγη ολοκληρωτών-διαφοριστών, παίρνουμε το αποτέλεσμα της απευθείας υλοποίησης.

Η υλοποίσηση σε σειρά προκύπτει αν εκφράσουμε την $H(s)$ ως γινόμενο συναρτήσεων. Η παραπάνω τυπική παραγοντοποίηση, αποτελεί και αυτή μια μορφή υλοποίσης σε σειρά, μόνο που χρησιμοποιεί υψηλής τάξης υποσυστήματα. Γενικότερα, ζητούμε υλοποιήσεις χρησιμοποιώντας χαμηλής τάξης υποσυστήματα. Κάνοντας παραγονοποίηση σε αριθμητή και παρονομαστή, η $H(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right) = H_1(s)H_2(s)$$

οπότε η είσοδος στο σύστημα περνά από δύο συστήματα στη σειρά με συναρτήσεις $H_1(s),\ H_2(s)$. Επομένως, η σε σειρά υλοποίηση θα είναι αυτή του επόμενου σχήματος



Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να γράψουμε την $H(s)$ ως

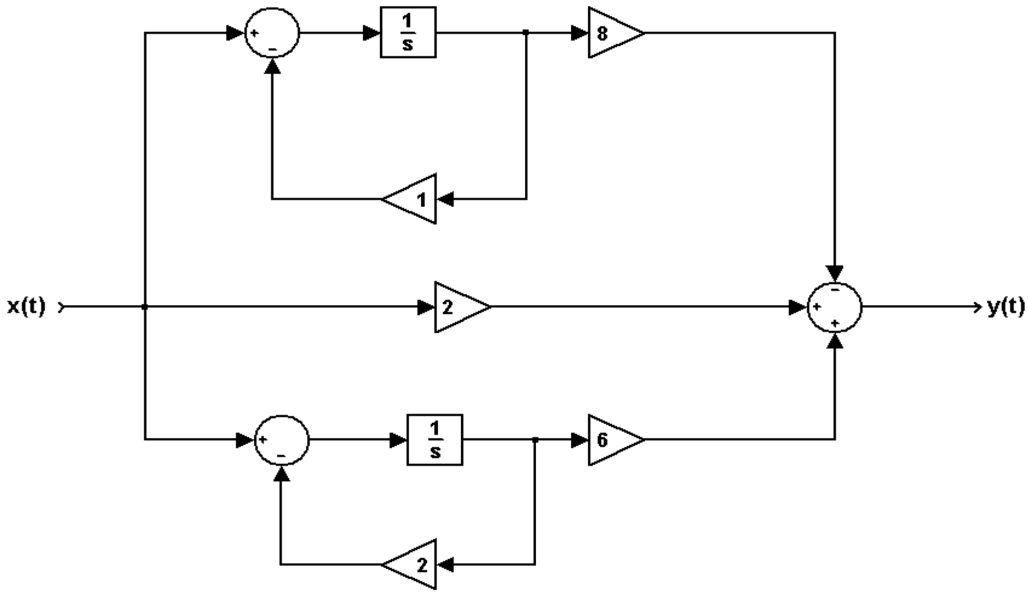
$$H(s) = \left(\frac{s+3}{s+2}\right)\left(\frac{2(s-1)}{s+1}\right) = H_1(s)H_2(s)$$

και να πάρουμε μια άλλη σε σειρά υλοποίηση.

Για να δημιουργήσουμε μια παράλληλη υλοποίηση, πρέπει να γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως άθροισμα απλών συναρτήσεων (όπως κατά την ανάλυση σε απλά κλάσματα). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η $H(s)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα, με τον ακόλουθο τρόπο

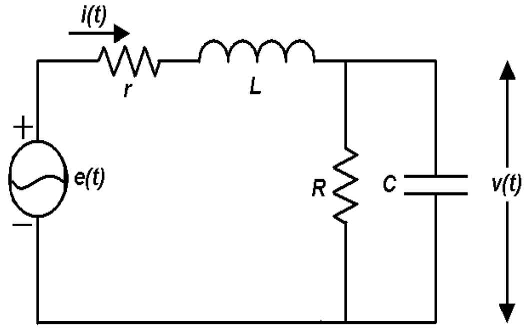
$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

(το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το πάρουμε κατευθείαν από το περιβάλλον MATLAB, χρησιμοποιώντας την εντολή $residue$ και στην οποία δίνουμε σαν είσοδο τα διανύσματα των συντελεστών των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή). Συνεπώς, η είσοδος εισέρχεται παράλληλα σε 3 συστήματα και η υπέρθεση των εξόδων μας δίνει τη συνολική έξοδο. Η παράλληλη υλοποίηση, χρησιμοποιώντας πρώτης τάξης συστήματα φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Παρατηρούμε λοιπόν, ότι υλοποίηση ενός συστήματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, ενώ το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο. Όλα τα παραπάνω, συμφωνούν με το γεγονός ότι πολλά συστήματα έχουν την ίδια συμπεριφορά σε ίδιες εισόδους (δηλαδή ίδια έξοδο), χωρίς όμως η εσωτερική τους δομή να είναι η ίδια. Από τη σχέση εισόδου-εξόδου και τη συνάρτηση μεταφοράς, δεν μπορούμε να εκμαιεύσουμε πληροφορίες σχετικά με την εσωτερική δομή ενός συστήματος. Τέτοιες πληροφορίες μας δίνει η μελέτη ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης, κάνοντας χρήση των μεταβλητών κατάστασης.

1.12 Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος



Βρείτε την καταστατική εξίσωση του κυκλώματος θεωρώντας ως μεταβλητές κατάστασης τις $v(t)$, $i(t)$

Λύση:

Από το νόμο τάσεων του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο του κυκλώματος, έχουμε

$$e(t) - ri(t) - Li'(t) - v(t) = 0$$

ή

$$i'(t) = -\frac{1}{L}u(t) - \frac{r}{L}i(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

ενώ από το νόμο ρευματων του Kirchhoff παίρνουμε

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + Cu'(t)$$

ή

$$v'(t) = -\frac{1}{RC}u(t) - \frac{1}{C}i(t)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην καταστατική εξίσωση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)$$

ή

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}e(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^t$$

και

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v(t) & i(t) \end{bmatrix}^t$$

1.13 Δίνονται οι εξισώσεις κατάστασης

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Αν A η παραπάνω μήτρα, υπολογίστε

$\alpha)$ την παράσταση e^{At} με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace και

$\beta)$ την κρουστική απόκριση του συστήματος

Λύση:

$\alpha)$ Από τη θεωρία έχουμε ότι $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$. Παρατηρούμε

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -8 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-5)(s+3)} & \frac{8}{(s-5)(s+3)} \\ \frac{2}{(s-5)(s+3)} & \frac{s-1}{(s-5)(s+3)} \end{bmatrix}$$

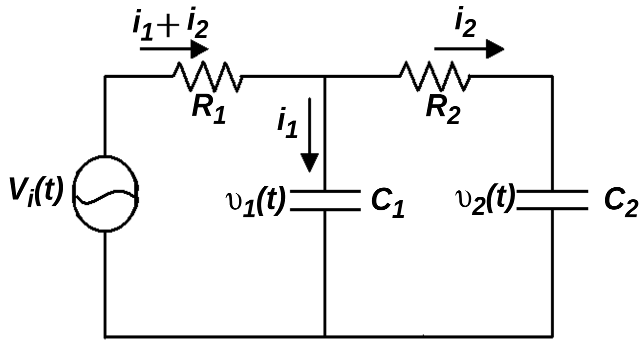
Εφαρμόζοντας αντίστροφο Laplace σε κάθε όρο της παραπάνω μήτρας (ανάλυση σε απλά κλάσματα), υπολογίζουμε τελικά

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0.5(e^{5t} + e^{-3t}) & e^{5t} - e^{-3t} \\ 0.25(e^{5t} - e^{-3t}) & 0.5(e^{5t} + e^{-3t}) \end{bmatrix} u(t)$$

β) Η κρουστική απόκριση ως γνωστόν δίνεται από τη σχέση $h(t) = \mathbf{c}^t e^{At}\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} = [1\ \ 0]^t$ και $\mathbf{c} = [1\ \ 1]^t$. Εκτελώντας τις πράξεις, καταλήγουμε ότι

$$h(t) = (\frac{3}{4}e^{5t} + \frac{1}{4}e^{-3t})u(t)$$

1.14 Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



Θεωρώντας ότι οι τάσεις $v_1(t),\ v_2(t)$ στα άκρα των δύο πυκνωτών αποτελούν την κατάσταση του κυκλώματος,

α) βρείτε τις εξισώσεις κατάστασεις και

β) επιλύστε τις εξισώσεις κατάστασης για πηγή τάσης (είσοδο) $V_i(t) = 0$ και για αρχικές συνθήκες $v_1(0) = v_2(0) = 0$.

Λύση:

α) Εφαρμόζουμε νόμο τάσεων στους δύο βρόχους, οπότε για τον αριστερό βρόχο έχουμε

$$-V_i + R_1(i_1 + i_2) + v_2 = 0$$

ενώ για τον δεξιό

$$-v_1 + R_2 i_2 + v_2 = 0$$

Για τους δύο πυκνωτές ισχύουν οι σχέσεις

$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} = C_1 \dot{v}_1$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt} = C_2 \dot{v}_2$$

και με αντικατάσταση στους νόμους του Kirchhoff, καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} v_1 + \frac{1}{R_2 C_1} v_2 + \frac{1}{R_1 C_1} V_i \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{R_2 C_2} v_1 - \frac{1}{R_2 C_2} v_2 \end{aligned}$$

Αν δηλαδή το διάνυσμα κατάστασης είναι το

$$\mathbf{x}(t) \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

τότε η καταστατική εξίσωση θα δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_i(t)$$

$\beta)$ Εφόσον η είσοδος είναι μηδενική και οι αρχικές συνθήκες είναι επίσης μηδενικές, δεν υπάρχει τρόπος να διεγερθεί το σύστημα, επομένως $\mathbf{x}(t) = 0$. Αυτό μπορεί να φανεί κι από το γεγονός ότι

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{b}V_i(t)d\tau = \mathbf{0}$$

όπου A η μήτρα της καταστατικής εξίσωσης και $\mathbf{b} = [1\ 1/(R_1C_1)]^t$, αφού $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ και $V_i(t) = 0$