Γ' Σετ ασκήσεων

1.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων και σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης

$\alpha)$ $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

$\beta)$ $x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$

$\gamma)$ $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t),$

$\delta)$ $x(t) = e^{-b|t|}$

1.2 Να αποδείξετε ότι

$\alpha)$ $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

$\beta)$ $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

$\gamma)$ $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$

$\delta)$ $\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$

1.3 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

$\alpha)$ $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$\beta)$ $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT), \quad (T > 0)$

$\gamma)$ $x(t) = t^n u(t),$

$\delta)$ $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)u(t)$

1.4 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML των συναρτήσεων

$\alpha)$ $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 9}, \quad \Re e\{s\} > 0$

β) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$

γ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}, \quad \Re e\{s\} > 1,$

δ) $X(s) = \dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$

1.5 Θεωρείστε ένα ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x(t) = e^{-t}u(t)$ και το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$

α) Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των $x(t),\ h(t)$

β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης βρείτε το ML $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$

γ) Από το ML $Y(s)$ καθορίστε την έξοδο $y(t)$

δ) Υπολογίστε την έξοδο $y(t)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης

1.6 ’Ενα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

α) ΄Οταν η είσοδος στο σύστημα είναι η $x(t) = e^{2t}$, η έξοδος είναι η $y(t) = (1/6)e^{2t}$.

β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

όπου b μια άγνωστη σταθερά. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

1.7 ΄Ενα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t).$$

α) Αν

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t),$$

πόσους πόλους έχει η συνάρτηση μεταφορας $G(s)$;

β) Για ποιες πραγματικές τιμές της παραμέτρου α το σύστημα S είναι ευσταθές;

1.8 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

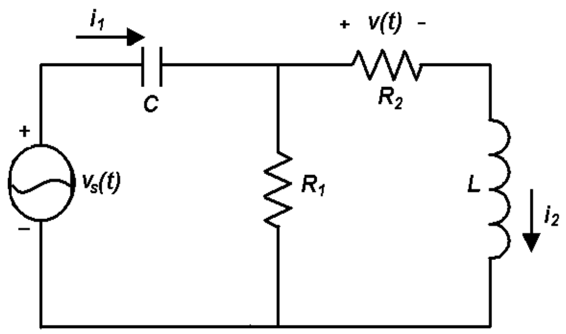
$$2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4\delta(t) + 2u(t) - 3u(t-1)$$

και οι αρχικές συνθήκες $y(0^-) = y'(0^-) = 0$

α) Βρείτε τις τιμές $y(0^+),\ y'(0^+)$

β) Βρείτε την $y(t)$

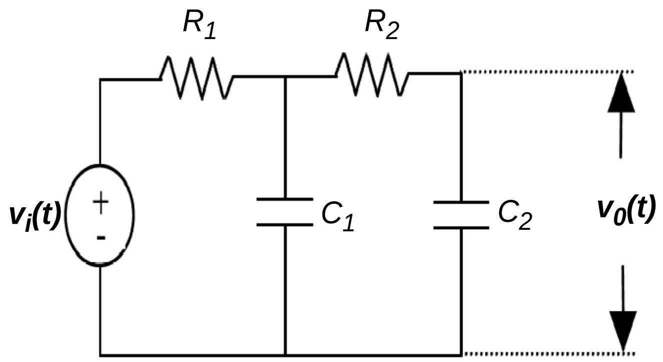
1.9 Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα με αρχικές συνθληκες $v_C(0^-)$ και $i_L(0^-)$



$\alpha)$ Υπολογίστε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace $V(s)$ της $v(t)$

$\beta)$ Θεωρώντας ως έξοδο την τάση $v(t)$ και ως είσοδο την τάση της γεννήτριας $v_s(t)$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος $H(s)$

1.10 Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



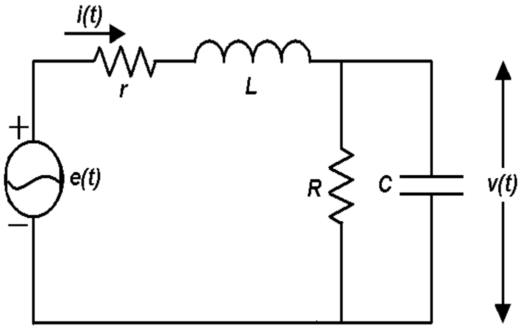
$\alpha)$ Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος μεταξύ της πηγής $v_i(t)$ (είσοδος) και της τάσης $v_0(t)$ (έξοδος)

$\beta)$ Γράψτε κι επιλύστε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά της τάσης $v_0(t)$, όταν $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1,\ v_i(t) = u(t)$ και η αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι 1 ενώ του δευτέρου είναι 0

1.11 Σχεδιάστε την απευθείας(direct), την παράλληλη (parallel) και τη σε σειρά (cascade) υλοποίηση του συστήματος που περιγράφεται από την συνάρτηση

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

1.12 Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος



Βρείτε την καταστατική εξίσωση του κυκλώματος θεωρώντας ως μεταβλητές κατάστασης τις $v(t),\ i(t)$

1.13 Δίνονται οι εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

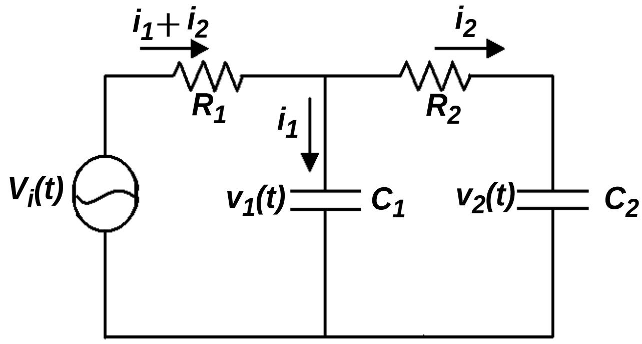
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Αν A η παραπάνω μήτρα, υπολογίστε

$\alpha)$ Την παράσταση e^{At} με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace

$\beta)$ Την κρουστική απόκριση του συστήματος

1.14 Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



Θεωρώντας ότι οι τάσεις $v_1(t),\ v_2(t)$ στα άκρα των δύο πυκνωτών αποτελούν την κατάσταση του κυκλώματος,

$\alpha)$ βρείτε τις εξισώσεις κατάστασεις και

$\beta)$ επιλύστε τις εξισώσεις κατάστασης για πηγή τάσης (είσοδο) $V_i(t) = 0$ και για αρχικές συνθήκες $v_1(0) = v_2(0) = 0$.