Λύσεις Β' Σετ ασκήσεων

1.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω συναρτήσεων και δώστε τη γραφική του παράσταση

$\alpha)$ $x(t) = \delta(t)$

$\beta)$ $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$

$\gamma)$ $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0,$

$\delta)$ $x(t) = \begin{cases} 1 & \mid t \mid < T_1 \\ 0 & \mid t \mid > T_1 \end{cases}$

Λύση:

$\alpha)$ $x(t) = \delta(t)$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του μετασχηματισμού Fourier έχουμε ότι

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^0 = 1 \tag{1.1}$$

που σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες συνεισφέρουν το ίδιο στον MF της συνάρτησης $\delta(t)$.

$\beta)$ $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$

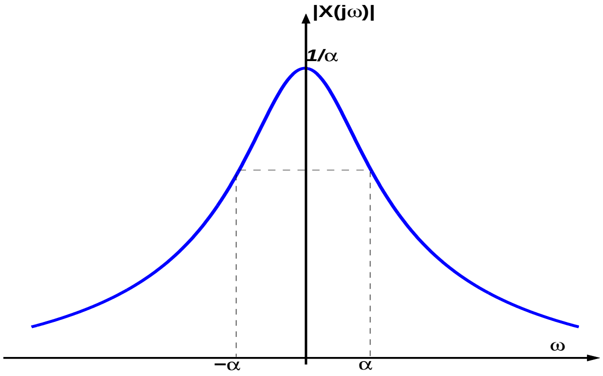
Από τον ορισμό του MF έχουμε ότι

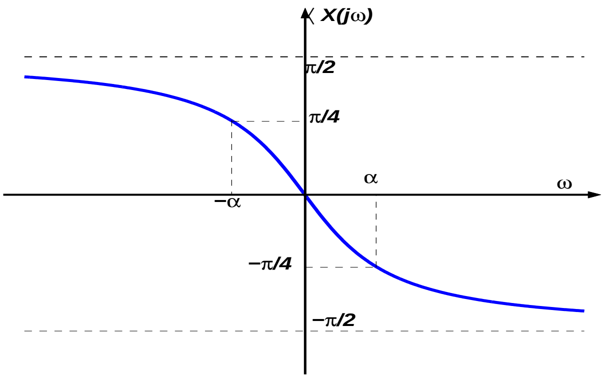
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha+j\omega},\quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

Εφόσον ο MF είναι μιγαδική συνάρτηση, για να την παραστήσουμε, πρέπει να παραστήσουμε το μέτρο και τη φάση του, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},\quad \angle X(j\omega) = -tan^{-1}(\frac{\omega}{\alpha})$$

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης φαίνονται στα επόμενα σχήματα



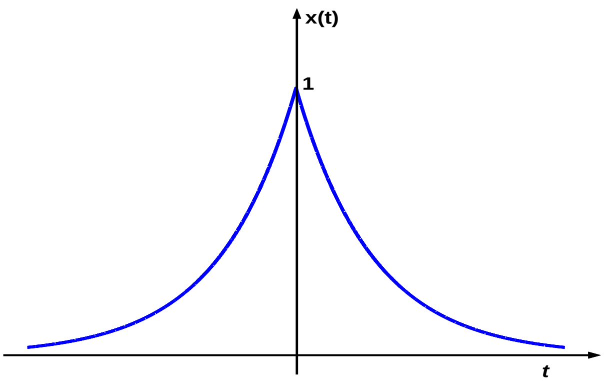


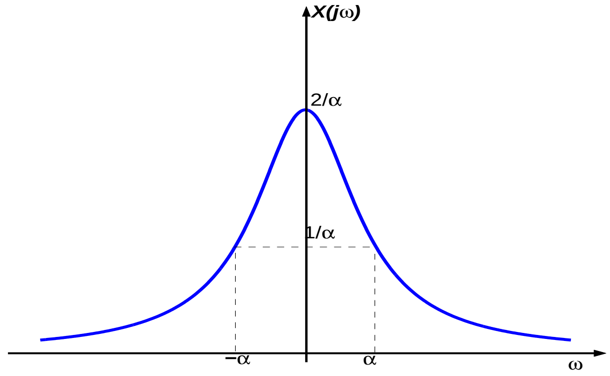
γ) $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση του MF είναι πραγματική. Η γραφική της παράσταση μαζί με αυτή της $x(t)$ δίνονται στα επόμενα σχήματα





δ) $x(t) = \begin{cases} 1 & \mid t \mid < T_1 \\ 0 & \mid t \mid > T_1 \end{cases}$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τον τύπο του MF έχουμε

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \\ &= \frac{2}{\omega} sin(\frac{\omega T_1}{2}) \end{aligned}$$

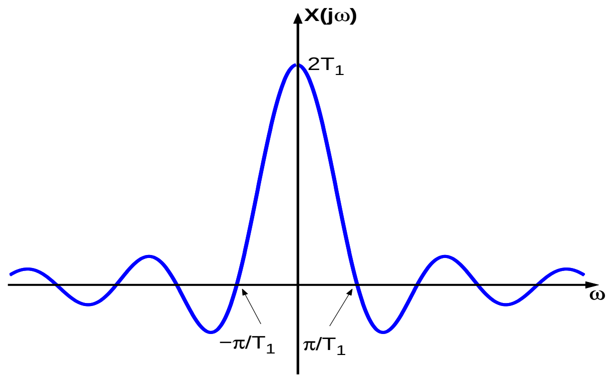
η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$X(j\omega) = T_1 \frac{\sin \frac{\omega T_1}{2}}{\frac{\omega T_1}{2}} = T_1 sinc(\frac{\omega T_1}{2}) \tag{1.2}$$

όπου

$$sinc(x) = \frac{sin(x)}{x}. \tag{1.3}$$

Η $sinc(x)$ είναι γνωστή και ως συνάρτηση δειγματοληψίας. Η γραφική παράσταση του MF φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που προέκυψε, περνάει περιοδικά από το 0, ανά π/T_1 και το ύψος των δευτερεύοντων λοβών τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Γενικά, η συνάρτηση $sinc(x)$

είναι ιδιαίτερης σημασίας και τη συναντούμε πολύ συχνά στο χώρο της επεξεργασίας σημάτων και των τηλεπικοινωνιών.

1.2 Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier των ακόλουθων σημάτων

$\alpha)$ $x(t) = [e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]u(t)$

$\beta)$ $x(t) = e^{-3|t|}sin2t$

$\gamma)$ $x(t) = \begin{cases} 1 + cos(\pi t) & , \ \mid t \mid \leq 1 \\ 0 & , \ \mid t \mid > 1 \end{cases}$

$\delta)$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

Λύση:

$\alpha)$ $x(t) = [e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]u(t)$

Εφόσον ο MF της συνάρτησης $e^{-\alpha t}u(t)$ είναι ο $\frac{1}{\alpha + j\omega}$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της διαμόρφωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τον MF της $x(t)$ οπότε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{[e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)]u(t)\} &= \mathcal{F}\{[e^{-\alpha t}u(t)]\cos(\omega_0 t)\} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}] \\ &= \frac{\alpha + j\omega}{\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega} \end{aligned}$$

$\beta)$ $x(t) = e^{-3|t|}sin2t$

Κάνοντας χρήση του ζεύγους

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

και του τύπου

$$\sin(2t) = \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j}$$

καθώς και της ιδιότητας της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε ότι

$$e^{-3|t|}\sin(2t) = \frac{1}{2j}e^{2jt}e^{-3|t|} - \frac{1}{2j}e^{-2jt}e^{-3|t|}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2j}\frac{6}{9 + (\omega - 2)^2} - \frac{1}{2j}\frac{6}{9 + (\omega + 2)^2} \\ &= -j\frac{24\omega}{\omega^4 + 10\omega^2 + 169} \end{aligned}$$

$\gamma)$ $x(t) = \begin{cases} 1 + cos\pi t & \mid t \mid \leq 1 \\ 0 & \mid t \mid > 1 \end{cases}$

Κάνοντας χρήση του ορισμού MF έχουμε

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-1}^{1} (1+\cos(\pi t))e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t})e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} e^{j(\pi-\omega)t}dt + \int_{-1}^{1} e^{-j(\pi+\omega)t}dt \\
&= 2\frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{\sin(\omega)}{\pi-\omega} - \frac{\sin(\omega)}{\pi+\omega} \\
&= 2\sin(\omega)\frac{\pi^2}{(\pi^2-\omega^2)\omega}
\end{aligned}
$$

$\delta)$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

Ομοίως, παίρνοντας το MF έχουμε

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{-|t-2n|}\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2j\omega n}\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2j\omega n}\frac{2}{1+\omega^2} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2}\big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n\omega)\big]
\end{aligned}
$$

1.3 Αν ο MF είναι αυτός που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ποια είναι η συνάρτηση $x(t)$

(α) $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

(β) $X(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^n}$. (Υπόδειξη: Η συνάρτηση $X(j\omega)$ είναι ανάλογη με την $(n-1)$ παράγωγο της $\frac{1}{1+j\omega}$)

Λύση:

(α) $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

Σύμφωνα με τον ορισμό του αντίστροφου MF έχουμε

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\omega}e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{j\omega}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}d\omega
\end{aligned}
$$

κι αφού το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, προκύπτει ότι

$$
x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}d\omega = sgn(t)
$$

όπου

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , \ t > 0 \\ -1 & , \ t < 0 \end{cases}$$

(β) $X(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^n}$

Χρησιμοποιούμε το ζεύγος

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+j\omega}$$

και την ιδιότητα της παραγώγισης, σύμφωνα με την οποία, αν ο MF της $x(t)$ είναι ο $X(j\omega)$, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} tx(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \\ t^{n-1}x(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j^{n-1}\frac{d^{n-1}X(j\omega)}{d\omega^{n-1}} \end{aligned}$$

'Εχοντας ότι $X(j\omega) = (1+j\omega)^{-1}$ και παραγωγίζοντας $n-1$ φορές, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} &= (-1)j(1+j\omega)^{-2} \\ \frac{dX^2(j\omega)}{d\omega^2} &= (-1)(-2)j^2(1+j\omega)^{-3} \\ &\vdots \\ \frac{dX^{n-1}(j\omega)}{d\omega^{n-1}} &= j^{n-1}(n-1)!(1+j\omega)^{-n} \end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} t^{n-1}e^{-t}u(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{(n-1)!}{(1+j\omega)^n} \Rightarrow \\ \frac{t^{n-1}e^{-t}u(t)}{(n-1)!} &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1+j\omega)^n} \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση που ζητούμε είναι η $x(t) = \dfrac{t^{n-1}e^{-t}u(t)}{(n-1)!}$

1.4 'Εστω η συνάρτηση $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau$ (δεν είναι συνέλιξη).

(α) Εκφράστε τον μετασχηματισμό Fourier $R(j\omega)$ της $r(t)$ με βάση του μετασχηματισμούς $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$, των $x(t)$, $y(t)$ αντίστοιχα.

(β) Υποθέστε ότι $x(t) = y(t) = e^{-|t|}$. Αφού υπολογίσετε το ολοκλήρωμα και την $r(t)$, χρησιμοποιήστε MF για να υπολογίσετε την $R(j\omega)$.

(γ) Όπως και στο (β), υπολογίστε την $R(j\omega)$ χρησιμοποιώντας την σχέση του (α) στο πεδίο της συχνότητας.

Λύση:

(α) Υπολογίζοντας τον MF της $r(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
R(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\big]e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\big[\int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)e^{-j\omega t}dt\big]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(j\omega)e^{j\omega\tau}d\tau \\
&= X(-j\omega)Y(j\omega)
\end{aligned}$$

(β) Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις $x(t),\ y(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}e^{-|t+\tau|}d\tau
\end{aligned}$$

Αν $t > 0$ τότε η συνάρτηση $r(t)$ γίνεται

$$\begin{aligned}
r(t) &= \int_{-\infty}^{-t} e^{\tau}e^{t+\tau}d\tau + \int_{-t}^{0} e^{\tau}e^{-t-\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}e^{-t-\tau}d\tau \\
&= (1+t)e^{-t}
\end{aligned}$$

Για $t < 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
r(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}e^{t+\tau}d\tau + \int_{0}^{-t} e^{-\tau}e^{t+\tau}d\tau + \int_{-t}^{\infty} e^{-\tau}e^{-t-\tau}d\tau \\
&= (1-t)e^{t}
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση $r(t)$ ως εξής

$$r(t) = (1+|t|)e^{-|t|}$$

Παίρνωντας τώρα τον MF της συνάρτησης που προέκυψε, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
R(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} (1-t)e^{t}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} (1+t)e^{-t}e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{(1+j\omega)^2} + \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{(1-j\omega)^2} \\
&= \frac{4}{(1+\omega^2)^2}
\end{aligned}$$

(γ) 'Οπως έχουμε υπολογίσει στην πρωτη άσκηση, ο MF των συναρτήσεων $x(t),\ y(t)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$X(j\omega) = Y(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Σύμφωνα με το (α) ερώτημα ισχύει ότι

$$R(j\omega) = X(-j\omega)Y(j\omega)$$

οπότε ο MF της $r(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= X(-j\omega)Y(j\omega) \\ &= \frac{2}{1+\omega^2}\,\frac{2}{1+\omega^2} \\ &= \frac{4}{(1+\omega^2)^2} \end{aligned}$$

το οποίο και συμφωνεί με το αποτέλεσμα στο ερώτημα (β)

1.5 Αν $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$, όπου $\mathcal{F}$ ο μετασχηματισμός Fourier και $x_m(t) = x(t)cos(\omega_1 t)sin(\omega_2 t + \theta)$,

(α) βρείτε τον $\mathcal{F}(x_m(t))$.

(β) Αν $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = -(\delta(t+\pi) + \delta(t-\pi))$, βρείτε την $f(t)$

Λύση:

(α) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $w(t) = x(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$, τότε ο MF της συνάρτησης αυτής σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης θα είναι

$$W(j\omega) = \frac{1}{2}\big(e^{j\theta}X(j(\omega-\omega_0)) + e^{-j\theta}X(j(\omega+\omega_0))\big)$$

Επομένως, ορίζουμε τη συνάρτηση $y(t) = x(t)\cos(\omega_1 t)$ οπότε $x_m(t) = y(t)cos(\omega_2 t + \theta - \frac{\pi}{2})$. Ο MF της $y(t)$ θα είναι

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\big(X(j(\omega-\omega_1)) + X(j(\omega+\omega_1))\big)$$

και ο MF της $x_m(t)$ θα είναι

$$X_m(j\omega) = \frac{1}{2}\big(e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})}Y(j(\omega-\omega_2)) + e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})}Y(j(\omega+\omega_2))\big)$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_m(j\omega) &= \frac{-j}{2}\big(e^{j\theta}Y(j(\omega-\omega_2)) + e^{-j\theta}Y(j(\omega+\omega_2))\big) \\ &= \frac{-j}{2}\Big[e^{j\theta}\big(\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_1-\omega_2)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_1-\omega_2))\big) \\ &\quad - e^{-j\theta}\big(\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_1+\omega_2)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_1+\omega_2))\big)\Big] \\ &= \frac{-j}{4}\Big[e^{j\theta}X(j(\omega-\omega_1-\omega_2)) + e^{j\theta}X(j(\omega+\omega_1-\omega_2)) \\ &\quad - e^{-j\theta}X(j(\omega-\omega_1+\omega_2)) - e^{-j\theta}X(j(\omega+\omega_1+\omega_2))\Big] \end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας MF και στα δύο μέλη έχουμε

$$(j\omega)^2 F(j\omega) + 2jF(j\omega) + 2F(j\omega) = \mathcal{F}\{-\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)\}. \tag{1.4}$$

Θέτοντας $x(t) = -\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$F(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{x(t)\}}{-\omega^2 + 2j\omega + 2}. \tag{1.5}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί ως γινόμενο παραγόντων αφού ισχύει ότι $-\omega^2 + 2j\omega + 2 = (j\omega + 1 - j)(j\omega + 1 + j)$. Αν κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα, τότε θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 2} &= \frac{\frac{1}{2j}}{j\omega + 1 - j} - \frac{\frac{1}{2j}}{j\omega + 1 + j} \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j(\omega-1)+1} - \frac{1}{j(\omega+1)+1}\right)\end{aligned}$$

και αφού ισχύει ότι

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+j\omega}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}e^{jt}e^{-t}u(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+j(\omega-1)} \\ e^{-jt}e^{-t}u(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+j(\omega+1)}\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 2}\} &= \frac{1}{2j}\big(e^{jt}e^{-t}u(t) - e^{-jt}e^{-t}u(t)\big) \\ &= \sin(t)e^{-t}u(t)\end{aligned}$$

Θέτοντας λοιπόν $y(t) = \sin(t)e^{-t}u(t)$ και χρησιμοποιώντας την ιδότητα της συνέλιξης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\}\mathcal{F}\{y(t)\} \Rightarrow \\ f(t) &= x(t) * y(t)\end{aligned}$$

κι επειδή $x(t) = -\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)$, θα έχουμε μια μετατοπισμένη έκδοση της $y(t)$, δηλαδή

$$f(t) = \sin(t)e^{-t-\pi}u(t+\pi) + \sin(t)e^{-t+\pi}u(t-\pi)$$

1.6 Έστω $x(t)$ τριγωνικός παλμός που ορίζεται ως εξής

$$x(t) = \begin{cases} 1- \mid t \mid & \mid t \mid < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

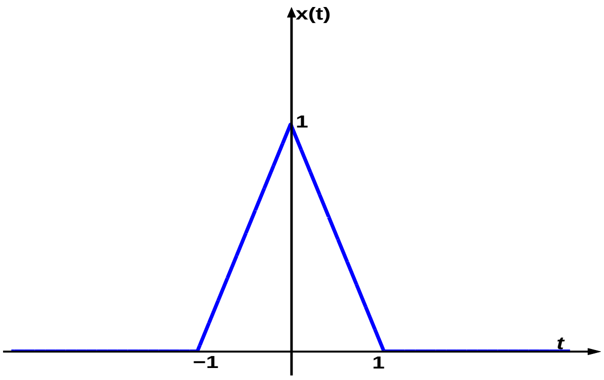
α) Παίρνοντας την παράγωγο της $x(t)$ και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της παραγώγου, υπολογίστε τον MF. (Υπόδειξη: εκφράστε την παράγωγο της $x(t)$ ως άθροισμα δύο παλμών)

β) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο της $x(t)$

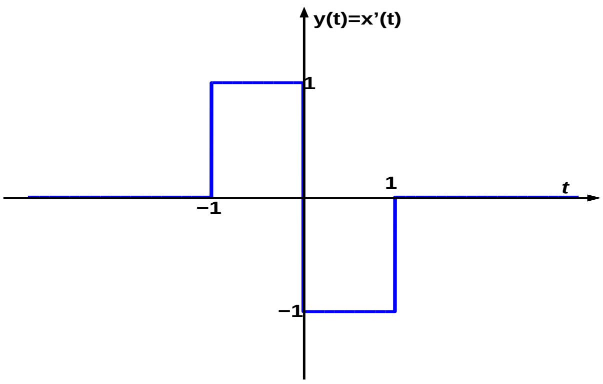
γ) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την ιδότητα της συνέλιξης (Υπόδειξη: θεωρείστε ότι η $x(t)$ έχει προέλθει από τη συνέλιξη δύο σημάτων)

Λύση:

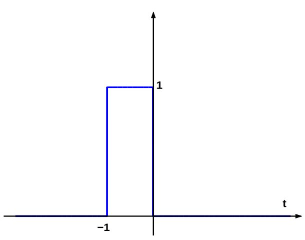
α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα



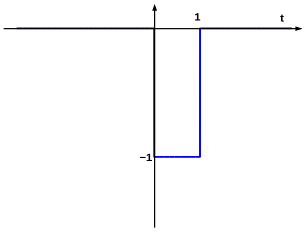
Παίρνωντας την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης και παριστάνοντάς την, έχουμε την εξής γραφική παράσταση



από την οποία είναι προφανές ότι μπορούμε να τη γράψουμε σαν άθροισμα δύο παλμών. Ως γνωστόν, ο MF του μοναδιαίου παλμού με εύρος T (από $-T/2$ εως $T/2$) δίνεται από τον τύπο $Tsinc(\omega T/2)$. Στην περίπτωση λοιπόν που $T = 1$, ο MF είναι ο $sinc(\omega/2) = \frac{sin(\omega/2)}{\omega/2}$. Εξετάζοντας λοιπόν ξεχωριστά κάθε παλμό της παραγώγου, μπορούμε να πούμε οτι αποτελούν μετατοπισμένες εκδόσεις του μοναδιαίου παλμού (στον δεξιό αλλάζει και το πρόσημο). Έτσι λοιπόν, κάνοντας χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε τον MF του εκάστοτε παλμού. Ενδεικτικά, δίνουμε τα επόμενα σχήματα οπού φαίνονται οι αντιστοιχίες μετασχηματισμών-παλμών.



$$\longleftrightarrow \qquad e^{j\frac{\omega}{2}}\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}$$



$$\longleftrightarrow \qquad -e^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}$$

Άρα ο MF της $y(t)$ λόγω γραμικότητας, θα ισούται με το άθροισμα των μετασχηματισμών των δύο παλμών, οπότε

$$Y(j\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\big(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\big) = \frac{4j}{\omega}\sin^2(\frac{\omega}{2})$$

και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, έχουμε ότι

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(j\omega) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2(\frac{\omega}{2}) = sinc^2(\frac{\omega}{2})$$

β) Αν πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι

$$y(t) = x''(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1) - 2\delta(t)$$

Προφανώς, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον MF της δεύτερης παραγώγου, ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση

$$Y(j\omega) = e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2 = 2\cos\omega - 2 = -4\sin^2(\frac{\omega}{2})$$

κι επομένως ο $X(j\omega)$ θα είναι

$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}Y(j\omega) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2(\frac{\omega}{2}) = sinc^2(\frac{\omega}{2})$$

γ) Ένας τρίτος τρόπος για να υπολογίσουμε τον MF της συνάρτησης που μας δίνεται, είναι να τη θεωρήσουμε ως το αποτέλεσμα της συνέλιξης δύο σημάτων. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να προκύψει από τη συνέλιξη δύο μοναδιαίων παλμών, δηλαδή $x(t) = x_1(t) * x_1(t)$, όταν

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \mid t \mid < 1/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

με $X_1(j\omega) = sinc(\frac{\omega}{2})$. Από την ιδιότητα της συνέλιξης όμως, έχουμε ότι

$$X(j\omega) = X_1(j\omega)X_1(j\omega) = sinc^2(\frac{\omega}{2})$$

1.7 Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = 10 + 2\delta(t-2) + \frac{sin(2000\pi t)}{\pi t}$ και η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \begin{cases} 10 & \mid \omega \mid < 1000\pi \\ 0 & \mid \omega \mid > 1000\pi \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε το MF $X(j\omega)$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), εκφράστε το MF $Y(j\omega)$ της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος με απόκριση $H(j\omega)$, όταν στην είσοδο εφαρμόσουμε το σήμα $x(t)$

(γ) Χρησιμοποιείστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να βρείτε την $y(t)$

Λύση:

(α) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμο Fourier στη $x(t)$ παίρνουμε ότι

$$X(j\omega) = 20\pi\delta(\omega) + 2e^{-2j\omega} + u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi)$$

όπου η συνάρτηση $u(\omega+2000\pi) - u(\omega-2000\pi)$ αποτελεί ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο αφού

$$u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi) = \begin{cases} 1 & \mid \omega \mid < 2000\pi \\ 0 & \mid \omega \mid > 2000\pi \end{cases}$$

(β) Κάνοντας χρήση της γραμμικότητας υπολογίζουμε τον MF κάθε όρου της εξόδου του φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1000\pi$, όταν στην είσοδο εισέλθει η $x(t)$, οπότε

$$\begin{aligned} Y_1(j\omega) &= 20\pi\delta(\omega)H(j\omega) = 20\pi\delta(\omega)H(j0) = 200\pi\delta(\omega) \\ Y_2(j\omega) &= 2e^{-2j\omega}H(j\omega) = 2e^{-2j\omega}[10u(\omega+1000\pi) - 10u(\omega-1000\pi)] \\ Y_3(j\omega) &= [u(\omega+2000\pi) - u(\omega-2000\pi)]H(j\omega) \\ &= [u(\omega+2000\pi) - u(\omega-2000\pi)][10u(\omega+1000\pi) - 10u(\omega-1000\pi)] \\ &= 10[u(\omega+1000\pi) - u(\omega-1000\pi)] \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις επιμέρους εξόδους, παίρνουμε το MF της εξόδου

$$Y(j\omega) = 200\pi\delta(\omega) + (20e^{-2j\omega} + 10)[u(\omega+1000\pi) - u(\omega-1000\pi)]$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο MF υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$, που είναι

$$y(t) = 100 + 20\frac{\sin(1000\pi(t-2))}{\pi(t-2)} + 10\frac{\sin(1000\pi t)}{\pi t}$$

1.8 Ένα συνεχούς χρόνου ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t-3) - e^{-7(t-3)}u(t-3)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

β) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (Χρησιμοποιήστε το περιβάλλον MATLAB)

γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο το σήμα

$$x(t) = 7 + 7cos(7t + \pi 2) \tag{1.6}$$

Λύση:

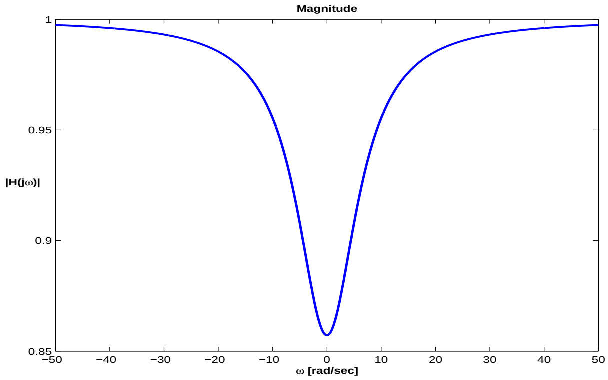
α) Για να υπολογίσουμε εύκολα τον MF της κρουστικής απόκρισης, χρησιμοποιούμε το ζεύγος

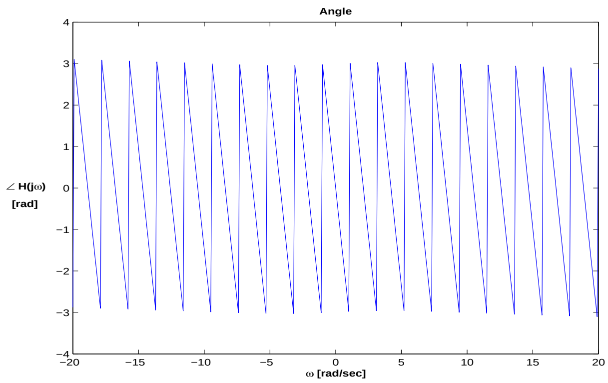
$$e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

οπότε ο MF της $h(t)$ θα είναι

$$H(j\omega) = e^{-3j\omega}[1 - \frac{1}{7+j\omega}] = e^{-3j\omega}(\frac{6+j\omega}{7+j\omega})$$

β) Χρησιμοποιώντας το περιβάλλον MATLAB, υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος (μέτρο και φάση) σε γραμμική κλίμακα.





γ) Αφού το σύστημα είναι γραμμικό, υπολογίζουμε την έξοδο εξετάζοντας κάθε όρο της εισόδου χωριστά, δουλεύοντας και για τους δύο (σταθερά και συνημίτονο) στο πεδίο της συχνότητας. Αν στην είσοδο έχουμε μια σταθερή συνάρτηση, τότε γενικά, για να υπολογίσουμε την έξοδο, πολλαπλασιάζουμε την απόκριση του συστήματος στην DC συχνότητα ($\omega = 0$) με την είσοδο (Μια σταθερά συνάρτηση περιέχει μόνο την DC συχνότητα). Στην συγκεκριμένη περίπτωση δηλαδή, η έξοδος θα είναι $7 \cdot H(j0) = 7 \cdot 6/7 = 6$.

Για την ημιτονοειδή είσοδο, παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου έχει συχνότητα $\omega = 7[rad/sec]$, οπότε μπορούμε να πούμε ότι, αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ, τότε και η έξοδος θα είναι ημιτονοειδές σήμα με το πλάτος της ενισχυμένο κατά $|H(j7)|$, όσο δηλαδή είναι το μέτρο της απόκριση συχνότητας στη συγκεκριμένη συχνότητα. Επίσης, η φάση της εξόδου θα καθυστερήσει τόσο, όση είναι η καθυστέρηση που εισάγει το ΓΧΑ σύστημα σε αυτή τη συχνότητα, δηλαδή η φάση από $\pi/2$ θα γίνει $\pi/2 + \angle H(j7) = \pi/2 - 0.66\pi = -0.16\pi$. Επομένως, αν είχα μόνο το ημιτονοειδές σήμα $7\cos(7t + \pi/2)$ στην είσοδο του συγκεκριμένου συστήματος, η έξοδος θα ήταν $7|H(j7)|\cos(7t + \pi/2 + \angle H(j7)) = 6.52\cos(7t - 0.16\pi)$

Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή της υπέρθεσης, καταλήγουμε ότι, αν στο ΓΧΑ σύστημα εφαρμόσουμε το σήμα

$$x(t) = 7 + 7cos(7t + \pi 2)$$

τότε η έξοδός του θα είναι η

$$y(t) = 6 + 6.52\cos(7t - 0.16\pi)$$

1.9 Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \delta(t) + 5e^{-5t}u(t)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος και σχεδιάστε το τετραγωνο του μέτρου και τη φάση ως συνάρτηση του ω.

β) Ποια συχνότητα "ενισχύει" περισσότερο το σύστημα; Σε ποια συχνότητα, το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης παίρνει το μισό της μέγιστης τιμής; (Η συχνότητα αυτή αναφέρεται και ως $3dB$ συχνότητα, διότι σε dB κλίμακα, $10log \mid H(j\omega) \mid^2$, η απόκριση εκεί είναι 3.01 dB μικρότερη από την μέγιστη τιμή.)

γ) Ποιά είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η

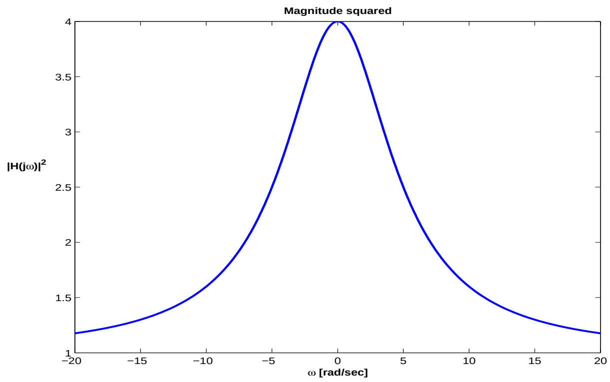
$$x(t) = 1 + 2cos(100t) \tag{1.7}$$

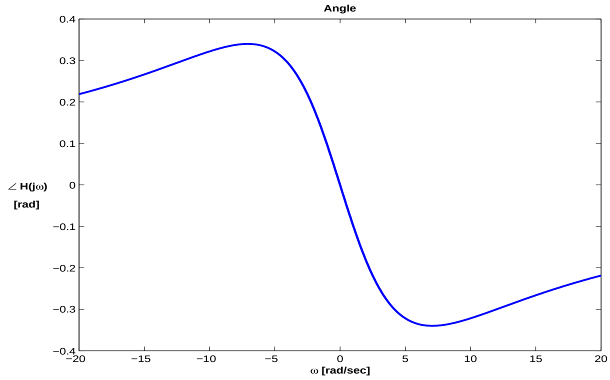
Λύση:

α) Εφαρμόζωντας ΜF στην κρουστική απόκριση υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας, η οποία θα είναι

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} + 5\mathcal{F}\{e^{-5t}u(t)\} = 1 + \frac{5}{5+j\omega} = \frac{10+j\omega}{5+j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας το περιβάλλον MATLAB σχεδιάζουμε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) σε γραμμική κλίμακα όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα





β) Όπως φαίνεται και από το σχήμα, το σύστημα ενισχύει περισσότερο την DC συχνότητα $\omega = 0$, για την οποία το τετράγωνο του μέτρου γίνεται ίσο με $|H(j0)|^2 = 4$. Για να βρούμε την $3dB$ συχνότητα λύνουμε την εξίσωση

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|H(j0)|^2}{2} = 2$$

οπότε έχουμε

$$100 + \omega^2 = 50 + 2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{50} \simeq 7.07 rad/sec$$

το οποίο μπορεί να επιβεβαιωθεί κι από την γραφική παράσταση του τετραγώνου του μέτρου της απόκρισης συχνότητας.

γ) Αντιμετωπίζοντας κάθε όρο της εισόδου χωριστά, υπολογίζουμε όπως και πριν την εκάστοτε έξοδο, οπότε αν η είσοδος είναι η $x(t) = 1$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = 1 \cdot |H(j0)| = 2$. Αν έχω ως είσοδο την συνάρτηση $x(t) = 2\cos(100t)$ τότε για να υπολογίσω την έξοδο πρέπει να ξέρω το μέτρο και τη φάση της απόκρισης για τη συχνότητα του σήματος εισόδου $\omega = 100 rad/sec$. Από τον τύπο της απόκρισης έχω ότι

$$H(j100) = \frac{10 + j100}{5 + j100} = 1,004 e^{-j0.05}$$

οπότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = 2 \cdot 1,004 \cos(100t - 0.05).$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης, συνδυάζουμε τις επιμέρους εξόδους και παίρνουμε την επιθυμητή έξοδο

$$y(t) = 2 + 2,008 \cos(100t - 0.05)$$

1.10 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t).$$

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.
Λύση:

Εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη MF και έχουμε

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

οπότε από το λόγο $Y(j\omega)/X(j\omega)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \\ &= \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} \\ &= \frac{2}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)} \\ &= \frac{c_1}{(2 + j\omega)} + \frac{c_2}{(4 + j\omega)} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_1 &= (2 + j\omega)H(j\omega)\big|_{j\omega = -2} \\ &= \frac{2}{4 - 2} = 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} c_2 &= (4+j\omega)H(j\omega)\big|_{j\omega=-4} \\ &= \frac{2}{2-4} = -1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, η απόκριση συχνότητας θα δίνεται από τη σχέση

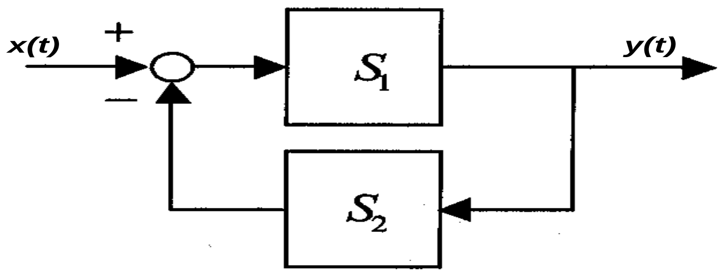
$$H(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)} - \frac{1}{(4+j\omega)}$$

και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε την κρουστική απόκριση

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2}{2+j\omega}\} - \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{4+j\omega}\} \\ &= e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t) \\ &= (e^{-2t} - e^{-4t})u(t) \end{aligned}$$

1.11 Έστω δύο ΓΧΑ συστήματα S1 και S2, των οποίων η λειτουργία εκφράζεται μέσα από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} S_1 &: \quad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ S_2 &: \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \end{aligned}$$



Θεωρώντας το σύστημα με ανάδραση του σχήματος, υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος και σχεδιάστε τη με τη βοήθεια της MATLAB. Αν στην είσοδο έχουμε την βηματική συνάρτηση, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος (βηματική απόκριση). Σχεδιάστε στο Simulink το σύστημα και επιβεβαιώστε το γεγονός, ότι αν το αντικαταστήσουμε με το συνολικό σύστημα που προκύπτει, η έξοδος παραμένει η ίδια.

Λύση:

Καταρχάς, υπολογίζουμε τις αποκρίσεις των δύο συστημάτων. Για το ΓΧΑ σύστημα S_1 παίρνωντας ΜF έχουμε

$$(j\omega)Y_1(j\omega) + Y_1(j\omega) = X_1(j\omega)$$

οπότε

$$H_1(j\omega) = \frac{Y_1(j\omega)}{X_1(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega}$$

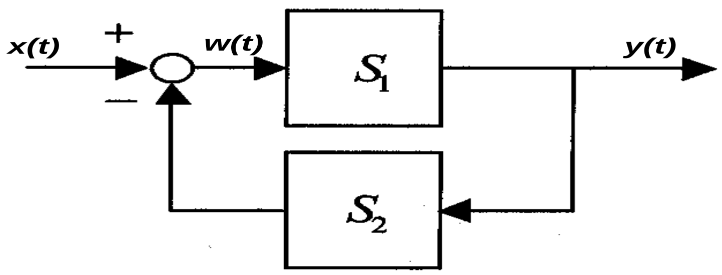
ενώ για το ΓΧΑ σύστημα S_2 θα έχουμε

$$(j\omega)Y_2(j\omega) + 2Y_2(j\omega) = (j\omega)X_2(j\omega) + X_2(j\omega)$$

δηλαδή

$$H_2(j\omega) = \frac{Y_2(j\omega)}{X_2(j\omega)} = \frac{1+j\omega}{2+j\omega}.$$

Για να υπολογίσουμε τη απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος (closed-loop), ονομάζουμε την έξοδο του αθροιστή $w(t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα



Τότε δουλεύοντας στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι $Y(j\omega) = H_1(j\omega)W(j\omega)$ όπου $W(j\omega) = X(j\omega) - H_2(j\omega)Y(j\omega)$. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις και λύνοντας ώς προς $Y(j\omega)/X(j\omega)$ παίρνουμε ότι

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει γενικότερα για ένα κλειστού βρόγχου σύστημα της μορφής αυτής, το οποίο και συναντάται συχνά στον προσαρμοστικό έλεγχο.

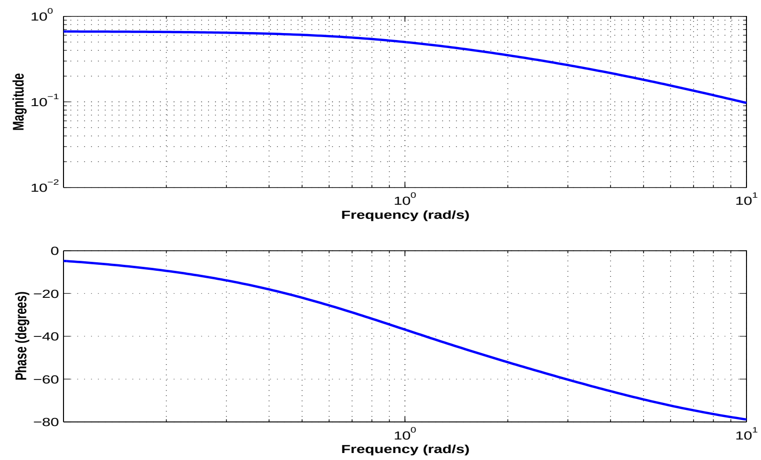
Αντικαθιστώντας τις αποκρίσεις των υποσυστημάτων, βρίσκουμε ότι το συνολικό σύστημα έχει απόκριση συχνότητας

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)} \\ &= \frac{\frac{1}{1+j\omega}}{1 + \frac{1}{1+j\omega}\frac{1+j\omega}{2+j\omega}} \\ &= \frac{2+j\omega}{(3+j\omega)(1+j\omega)} \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια της MATLAB παριστάνουμε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση). Αν υπολογίσουμε αναλυτικά το μέτρο και τη φάση της $H(j\omega)$ τότε παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{\omega^2+1}} \\ \angle H(j\omega) &= \arctan(\frac{\omega}{2}) + \arctan(\frac{-\omega}{3}) + \arctan(-\omega) \end{aligned}$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις μέτρου και φάσης σε λογαριθμική κλίμακα.



Για να υπολογίσουμε την βηματική απόκριση του συστήματος, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της συνέλιξης, οπότε έχουμε

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(3+j\omega)(1+j\omega)}\big(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\big)$$

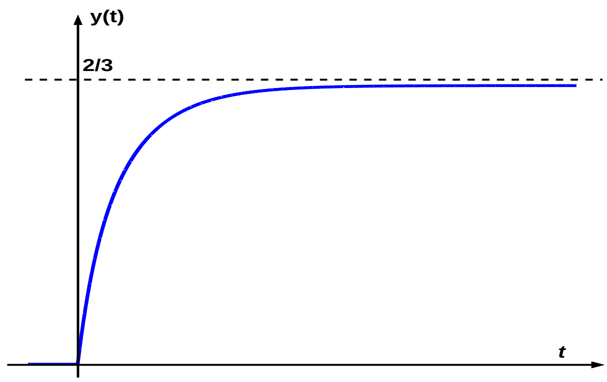
όπου μετά από ανάλυση σε απλά κλάσματα μπορούμε να γράψουμε την $Y(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \frac{-\frac{1}{6}}{3+j\omega} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+j\omega} + \frac{\frac{2}{3}}{j\omega} + \frac{2}{3}\pi\delta(\omega).$$

Χρησιμοποιώντας αντίστροφο ΜΦ μεταφερόμαστε στο πεδίο του χρόνου οπότε

$$y(t) = [\frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}]u(t)$$

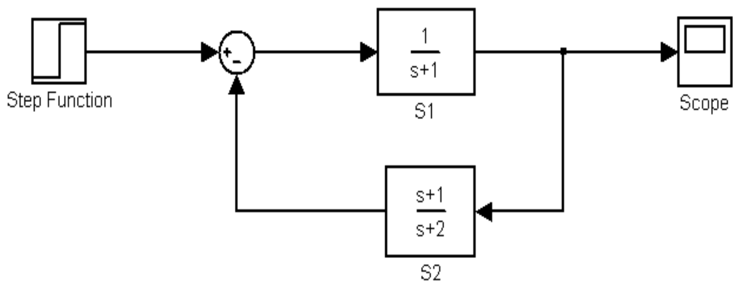
Στο επόμενο σχήμα παριστάνεται η βηματική απόκριση του συστήματος

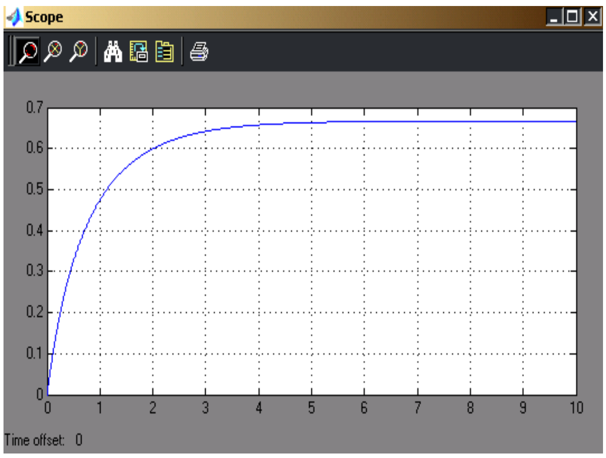


Για να σχεδιάσουμε στο Simulink μοντέλα συνεχους χρόνου χρησιμοποιούμε blocks από την πρώτη βιβλιοθήκη με το όνομα $simulink$. Αν θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

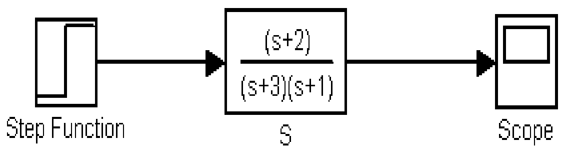
$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \ldots + b_n(j\omega)^n}{\alpha_0 + \alpha_1(j\omega) + \ldots + \alpha_m(j\omega)^m}$$

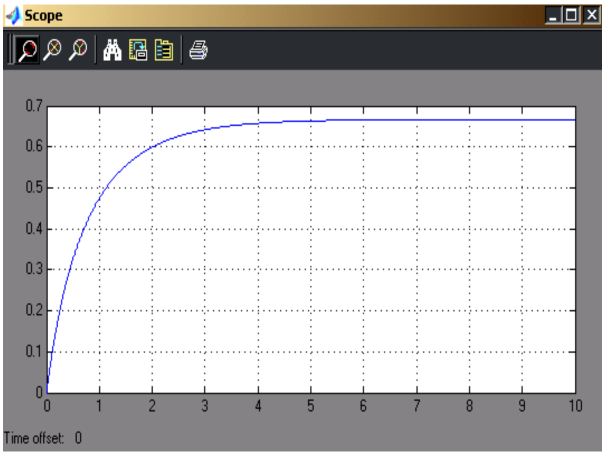
τότε χρησιμοποιούμε το block $TransferFcn$ από τον κατάλογο $Continuous$ στο οποίο και ορίζουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή, με τον βαθμό του παρονομαστή να είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του αριθμητή. Το Simulink εμφανίζει τα block χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace οπότε για να παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier, θέτουμε $s = j\omega$. Στην είσοδο του συστήματος χρησιμοποιούμε τη βηματική συνάρτηση δηλαδή το block $StepFunction$ με $step\ time = 1$ (για να ορίσω τις παραμέτρους κάθε block, κάνω διπλό κλικ πάνω τους) και χρησιμοποιώντας $scopes$ παίρνουμε τις γραφικές παραστάσεις. Ορίζοντας και το χρόνο από το menu $Simulation - Simulation\ parameters$ μέσα στον οποίο θα προσομοιώνεται το μοντέλο, παίρνουμε τη γραφική παράσταση της εξόδου. Το μοντέλο που κατασκευάζουμε καθώς και η έξοδος του συστήματος, φαίνονται στο επόμενο σχήμα Αν αντικαταστήσουμε το σύστημα



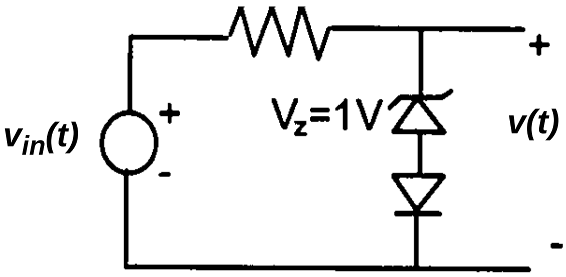


με ανάδραση με το ισοδύναμο χωρίς ανάδραση κύκλωμα και υπολογίσουμε την έξοδο, τότε όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα, η έξοδος παραμένει η ίδια, όπως άλλωστε αναμενόταν.





1.12 Το παρακάτω κύκλωμα με τη δίοδο Zener αποτελεί έναν ιδανικό ψαλιδιστή.



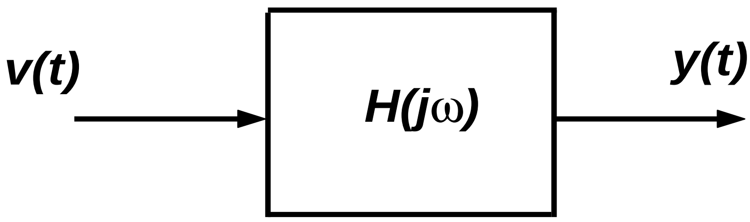
Σχεδιάστε την έξοδο του κυκλώματος και υπολογίστε τον MF της εξόδου όταν η τάση εισόδου δίνεται από τη σχέση

$$v_{in}(t) = (t+2)u(t+2) - 2tu(t) + (t-2)u(t-2) \quad Volts$$

και η ταση στην έξοδο είναι

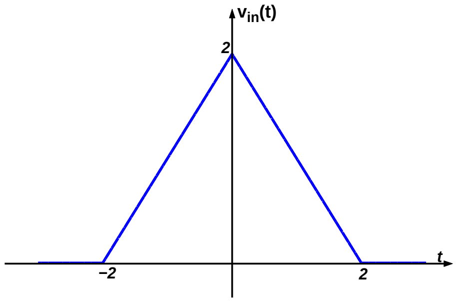
$$v(t) = \begin{cases} v_{in}(t) & , \quad v_{in}(t) < 1 \\ 1 & , \quad v_{in}(t) \geq 1 \end{cases}$$

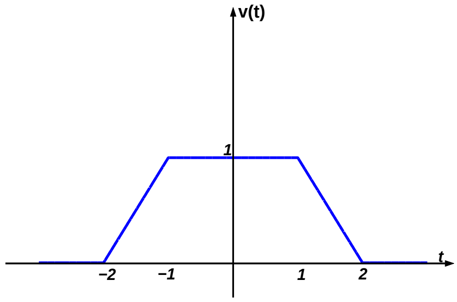
Έστω ότι η ψαλιδισμένη έξοδος περνάει μέσα από ένα ΓΧΑ του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι $H(j\omega) = j\omega$. Σχεδιάστε την έξοδό του, $y(t)$, χωρίς να την υπολογίσετε αναλυτικά.



Λύση:

(α) Πριν υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου, παριστάνουμε γραφικά την είσοδο και την έξοδο στα επόμενα σχήματα

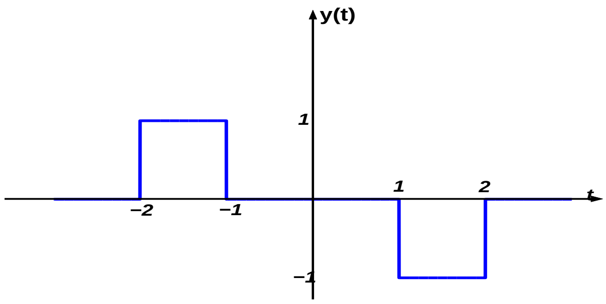




Για να υπολογίσουμε το MF του σήματος εξόδου, εφαρμόζουμε τον ορισμό, οπότε

$$
\begin{aligned}
V(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-2}^{1} (t+2)e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt - \int_{1}^{2} (t-2)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{j\omega}[(t+2)e^{-j\omega t}]_{-2}^{1} + \frac{1}{j\omega}\int_{-2}^{-1} e^{-j\omega t}dt - \frac{1}{j\omega}[e^{-j\omega t}]_{-1}^{1} \\
&\quad + \frac{1}{j\omega}[(t-2)e^{-j\omega t}]_{1}^{2} - \frac{1}{j\omega}\int_{1}^{2} e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{j\omega}e^{j\omega} - \frac{1}{(j\omega)^2}[e^{j\omega} - e^{2j\omega}] + \frac{1}{j\omega}[e^{j\omega} - e^{-j\omega}] + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2}[e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}] \\
&= \frac{1}{(j\omega)^2}[e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}] - \frac{1}{(j\omega)^2}[e^{j\omega} + e^{-j\omega}] \\
&= \frac{2}{\omega^2}[\cos(\omega) - \cos(2\omega)]
\end{aligned}
$$

(β) Η απόκριση συχνότητας του συστήματος, μας φανερώνει ότι πρόκειται για ένα σύστημα διαφοριστή, όπου η έξοδος είναι η παράγωγος της εισόδου, οπότε αν στην είσοδο έχουμε την $v(t)$, στην έξοδο θα έχουμε το σήμα του παρακάτω σχήματος



1.13 Μια περιοδική συνάρτηση κρουστικών παλμών (periodic impulse train) ορίζεται από τον τύπο

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

(α) Σχεδιάστε το σήμα για $-3T_0 \leq t \leq 3T_0$

(β) Ποια είναι η βασική συχνότητα, ω_0, αν $T_0 = 10$. Χρησιμοποιείστε την τιμη $T_0 = 10$ για τα υπόλοιπα υποερωτήματα

(γ) Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier c_k, στην αναπαράσταση

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

(δ) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος για $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$

(ϵ) Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι η είσοδος ενός συστήματος με απόκριση συχνότητας

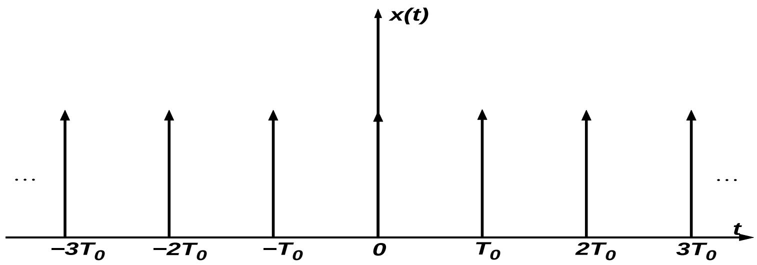
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-4j\omega} & \mid \omega \mid < \omega_{co} \\ 0 & \mid \omega \mid > \omega_{co} \end{cases}$$

με $\omega_{co} = \pi/T_0$, ποια είναι η έξοδος του συστήματος;

($\sigma\tau$) Αν $\omega_{co} = 3\pi/T_0$, ποια η έξοδος στην περίπτωση αυτή;

Λύση:

(α) Για το διάστημα $-3T_0 \leq t \leq 3T_0$ το σήμα αναπαρίσταται στο επόμενο σχήμα



(β) Εφόσον $T_0 = 10$, τότε η βασική συχνότητα θα είναι

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{5}$$

(γ) Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, ολοκληρώνουμε σε μια περίοδο, οπότε

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} \delta(t)e^{-jk(\pi/5)t}dt \\ &= \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} \delta(t)dt \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να γραφεί

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{10} e^{\frac{jk\pi}{5}t}$$

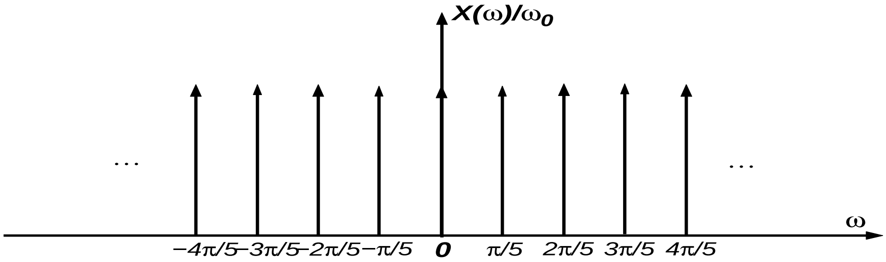
(δ) Για να παραστήσουμε το φάσμα της συνάρτησης αρκεί να υπολογίσουμε το MF. Αφού $\delta(t) \leftrightarrow 1$ τότε θα ισχύει ότι $\delta(t - nT_0) \leftrightarrow e^{-jn\omega T_0}$, οπότε λόγω γραμμικότητας έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) &\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega T_0} \\ &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega T_0} \\ &\leftrightarrow T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn\omega T_0}\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε στη συνάρτηση αυτή, ως μεταβλητή χρόνου το ω και ως βασική συχνότητα το T_0 τότε χρησιμοποιώντας την έκφραση της συνάρτησης σε εκθετική σειρά Fourier, παίρνουμε

$$T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn\omega T_0} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Άρα το φάσμα της συνάρτησης θα έχει την ίδια μορφή με την παράσταση της συνάρτησης στο χρόνο, οπότε αν την παραστήσουμε για $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$ έχουμε



(ε) Ουσιαστικά το σύστημα καθυστερεί την είσοδο κατά 4 μονάδες χρόνου, διώχνοντας βέβαια τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από $\omega_{co} = \pi/10$. Συνεπώς, το συχνοτικό περιεχόμενο που "περνάει" από το σύστημα είναι αυτό της DC συχνότητας ($\omega = 0$) ή ο $k = 0$ όρος της σειράς, οπότε η έξοδος θα είναι

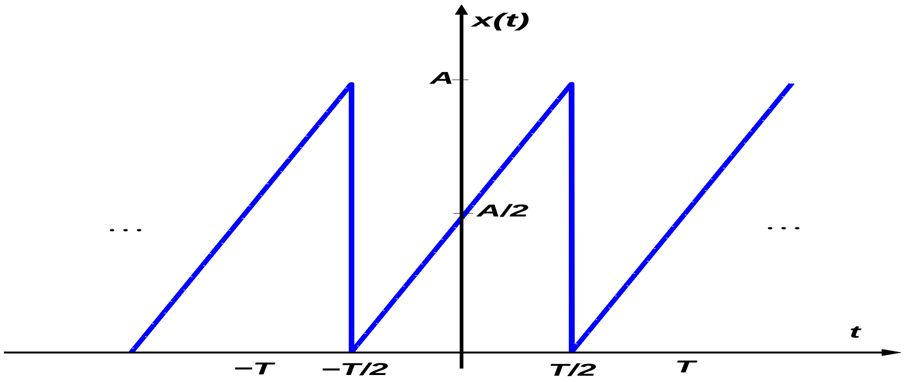
$$y(t) = H(j0)\frac{1}{10}e^{-j(0)(\pi/5)t} = 0.1$$

(στ) Στην περίπτωση που $\omega_{co} = 3\pi/T_0$, οι όροι που "περνάνε" από το φίλτρο είναι οι $k = -1, 0, 1$, δηλαδή οι συχνότητες $-\pi/5, 0, \pi/5$ και η έξοδος είναι

$$\begin{aligned}y(t) &= H(j0)\frac{1}{10}e^{j(0)(\pi/5)t} + H(j\pi/5)\frac{1}{10}e^{j(1)(\pi/5)t} + H(-j\pi/5)\frac{1}{10}e^{j(-1)(\pi/5)t} \\ &= 0.1 + 0.1e^{-4j\pi/5}e^{j(\pi/5)t} + 0.1e^{4j\pi/5}e^{-j(\pi/5)t} \\ &= 0.1\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{4\pi}{5}\right)\right) \\ &= 0.1\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}(t-4)\right)\right)\end{aligned}$$

1.14

Βρείτε τη βασική περίοδο και τη βασική συχνότητα του παρακάτω σήματος και υπολογίστε του συντελεστές c_k της αντίστοιχης σειράς Fourier. Εκφράστε το σήμα ως σειρά Fourier. Χρησιμοποιώντας



το περιβάλλον MATLAB, σχεδιάστε το σήμα που προκύπτει για $5,\ 15,\ 250$ αρμονικές (συντελεστές) και για $A = T = 1$.

Λύση:

Προφανώς, η βασική περίοδος του σήματος είναι T και η βασική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T$. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο της εκθετικής σειράς

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

όπου

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

Για $k = 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T}t + \frac{A}{2} dt \\ &= \frac{A}{2T^2}\left[t^2\right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{A}{2T}\left[t\right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

ενώ για $k \neq 0$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\frac{A}{T}t+\frac{A}{2})e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\
&= \frac{A}{T^2}\frac{-T}{2jk\pi}\left[(t+\frac{T}{2})e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{A}{T^2}\frac{-T}{2jk\pi}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt}_{=0} \\
&= \frac{A}{T^2}\frac{-T}{2jk\pi}(Te^{-jk\pi}) \\
&= j\frac{A(-1)^k}{2k\pi}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές είναι αμιγώς φανταστικοί αριθμοί και σχηματίζουν μια περιττή ακολουθία, πράγμα που συνάδει με την πραγματική μας συνάρτηση αφού και αυτή είναι περιττή (γίνεται εμφανές αν αφαιρέσουμε την σταθερά $A/2$). Επομένως, η συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να γραφεί

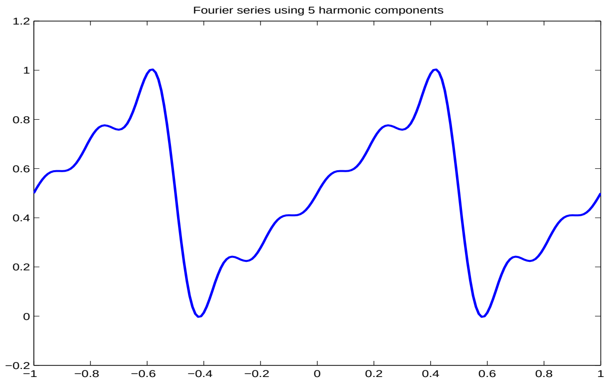
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \frac{A}{2} - \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} j\frac{A(-1)^k}{k\pi}e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

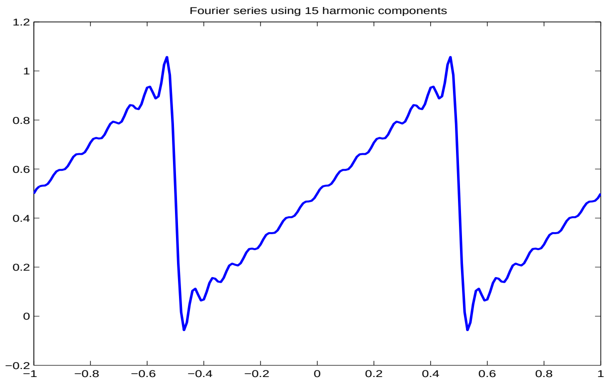
Για να παραστήσουμε τη σειρά Fourier με τη βοήθεια της MATLAB δημιουργούμε το παρακάτω m-file το οποίο δέχεται στην είσοδο το πλάτος A, την περίοδο T και το πλήθος N των συντελεστών που θέλουμε.

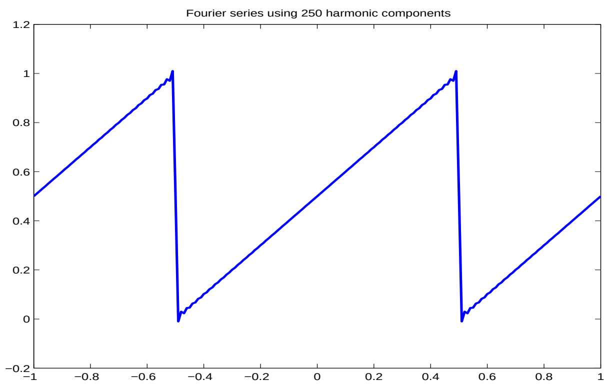
```
function out=fs1(A,T,N)
%time interval
t=-T:1/100:T;

%period time
tt=-T/2:1/100:T/2;

%period length
n=length(tt);

%real function
x=A*tt/T+A/2; x=[x((n+1)/2:n) x(2:n) x(2:(n+1)/2)];

%Compute the Fourier Series by summing the harmonic components
out=A/2; for k=-N:N
    if k´=0
        out=out+((j*A*(-1)·k)/(2*k*pi))*exp(j*k*2*pi*t/T);
    end
```

```
end
%Plot Fourier series
plot(t,real(out))
set(findobj(gca,'Type','line','Color','b'),'LineWidth',2)
title(cat(2,['Fourier series using ' num2str(N) ' harmonic
components']))
```

Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε την προσέγγιση της συνάρτησης για $N = 5,\ 15,\ 250$







Όπως φαίνεται κι από τα σχήματα, γενικά, όσους περισσότερους συντελεστές χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα προσεγγίζουμε τη συνάρτηση που θέλουμε.

1.15

Βρείτε τις σειρές Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο $T = 2\pi$

(α) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ 1 & t \in [0, \pi] \end{cases}$

(β) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in [0, \pi] \end{cases}$

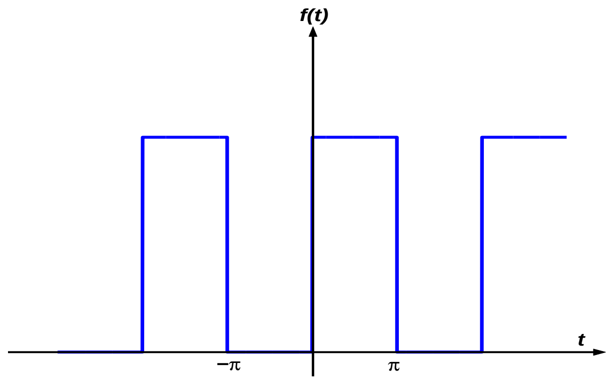
(γ) $f(t) = \begin{cases} -t & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in (0, \pi] \end{cases} \qquad f(0) = 0$

(δ) $f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in [0, \pi] \end{cases}$

Σχεδιάστε στη MATLAB τα σήματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας 25 συντελεστές.

Λύση:

(α) Η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi,\ \pi]$. Έτσι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1dt = \frac{1}{2}$$

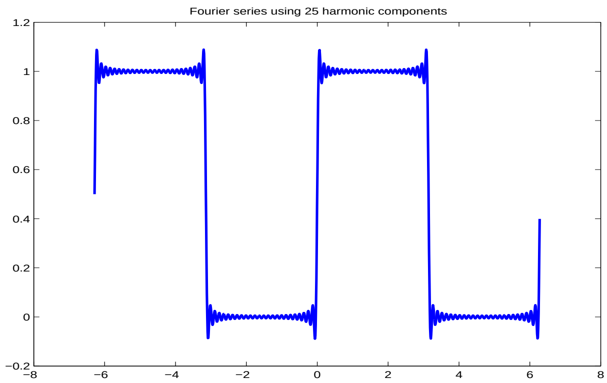
$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin(nt)\Big|_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nt)dt \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

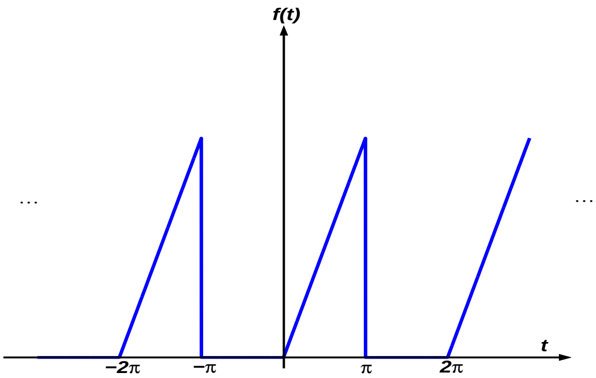
Επομένως, η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί από τη σειρά

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\big(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \ldots + \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)t) + \ldots\big)$$

και για 25 συντελεστές η συνάρτηση προσεγγίζεται ως εξής:



(β) Η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi,\ \pi]$ και παριστάνεται στο επόμενο σχήμα.



Επομένως, υπολογίζοντας του συντελεστές της σειράς Fourier έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} tdt = \frac{\pi}{4}$$

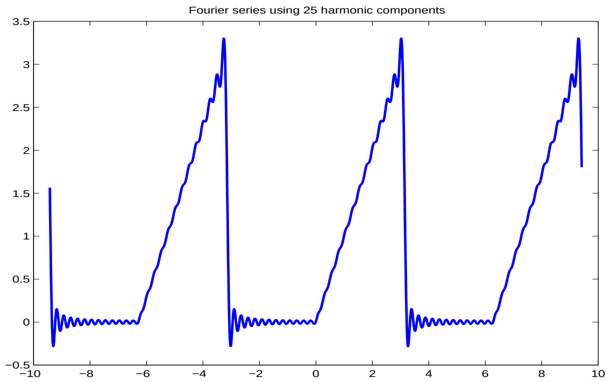
$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{t\sin(nt)}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(nt)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{t\cos(nt)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt\Big) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}\pi}{n} + \frac{sin(nt)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad n = 1,2,3,\dots
\end{aligned}
$$

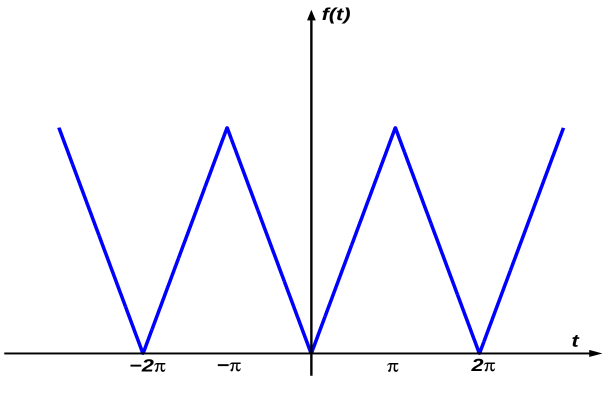
'Αρα, η συνάρτηση $f(t)$ προσεγγίζεται ως εξής

$$
f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(nt)}{n}
$$

και για 25 συντελεστές, έχουμε την παρακάτω προσέγγιση



(γ) Η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi,0)\bigcup(0,\pi]$ και άρτια και φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Αφού είναι άρτια σημαίνει ότι $b_n = 0$, ενώ για τα α_n έχουμε

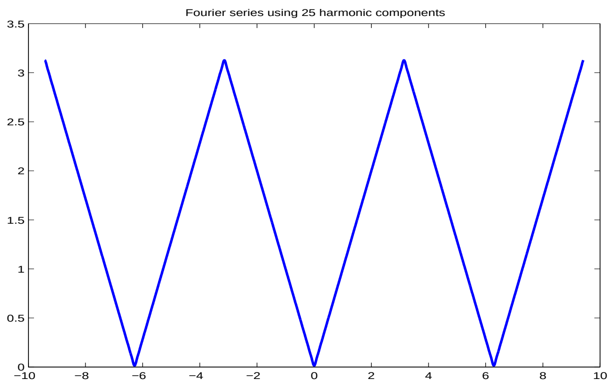
$$
\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{\pi}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{t\sin(nt)}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nt)}{n^2}\bigg|_0^{\pi} \\
&= 2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

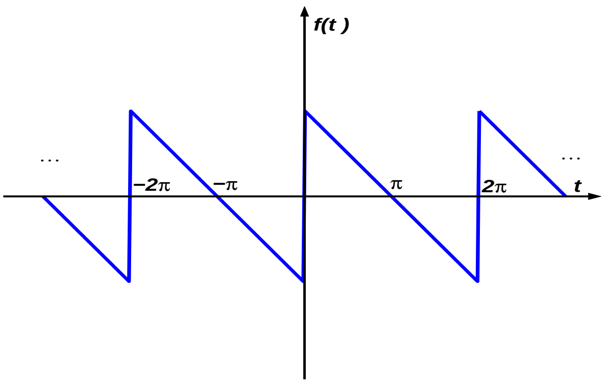
Άρα η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα απείρων όρων με τον ακόλουθο τρόπο

$$
f(t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}
$$

και για 25 συντελεστές έχουμε το επόμενο σχήμα



(δ) Η συνάρτηση είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi,\ \pi]$ και περιττή, οπότε $\alpha_n = 0$. Η συνάρτηση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Οι συντελεστές b_n υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi})\sin(nt)dt = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{x}{2pi})\sin(nt)dt = \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} tsin(nt)dt \\
&= -\frac{1}{n\pi}[(-1)^n-1]+\frac{(-1)^n}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

'Αρα

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

και για 25 συντελεστές παίρνουμε