Β' Σετ ασκήσεων

1.1

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω συναρτήσεων και δώστε τη γραφική του παράσταση

$\alpha)$ $x(t) = \delta(t)$

$\beta)$ $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$

$\gamma)$ $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0,$

$\delta)$ $x(t) = \begin{cases} 1 & \mid t \mid < T_1 \\ 0 & \mid t \mid > T_1 \end{cases}$

1.2

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier των ακόλουθων σημάτων

$\alpha)$ $x(t) = [e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]u(t)$

$\beta)$ $x(t) = e^{-3|t|}sin2t$

$\gamma)$ $x(t) = \begin{cases} 1 + cos(\pi t) & , \quad \mid t \mid \leq 1 \\ 0 & , \quad \mid t \mid > 1 \end{cases}$

$\delta)$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

1.3

Αν ο MF είναι αυτός που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ποια είναι η συνάρτηση $x(t)$

(α) $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

(β) $X(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^n}$. (Υπόδειξη: Η συνάρτηση $X(j\omega)$ είναι ανάλογη με την $(n-1)$ παράγωγο της $\frac{1}{1+j\omega}$

1.4

(α) 'Εστω η συνάρτηση $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau$ (δεν είναι συνέλιξη). Εκφράστε τον μετασχηματισμό Fourier $R(j\omega)$ της $r(t)$ με βάση του μετασχηματισμούς $X(j\omega),\ Y(j\omega)$, των $x(t),\ y(t)$ αντίστοιχα.

(β) Υποθέστε ότι $x(t) = y(t) = e^{-|t|}$. Αφού υπολογίσετε το ολοκλήρωμα και την $r(t)$, χρησιμοποιήστε ΜF για να υπολογίσετε την $R(j\omega)$.

(γ) Όπως και στο (β), υπολογίστε την $R(j\omega)$ χρησιμοποιώντας την σχέση του (α) στο πεδίο της συχνότητας.

1.5

(α) Αν $\mathcal{F}(x(t)) = X(\omega)$, όπου $\mathcal{F}$ ο μετασχηματισμός Fourier και $x_m(t) = x(t)cos(\omega_1 t)sin(\omega_2 t + \theta)$, βρείτε τον $\mathcal{F}(x_m(t))$.

(β) Αν $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = -(\delta(t+\pi) + \delta(t-\pi))$, βρείτε την $f(t)$

1.6

Έστω $x(t)$ τριγωνικός παλμός που ορίζεται ως εξής

$$x(t) = \begin{cases} 1- \mid t \mid & \mid t \mid < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Παίρνοντας την παράγωγο της $x(t)$ και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της παραγώγου, υπολογίστε το MF. (Υπόδειξη: εκφράστε την παράγωγο της $x(t)$ ως άθροισμα δύο παλμών)

β) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο της $x(t)$

γ) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την ιδότητα της συνέλιξης (Υπόδειξη: θεωρείστε ότι η $x(t)$ έχει προέλθει από τη συνέλιξη δύο σημάτων)

1.7

Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = 10 + 2\delta(t-2) + \frac{sin(2000\pi t)}{\pi t}$ και η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \begin{cases} 10 & \mid \omega \mid < 1000\pi \\ 0 & \mid \omega \mid > 1000\pi \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε το MF $X(j\omega)$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), εκφράστε το MF $Y(j\omega)$ της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος με απόκριση $H(j\omega)$, όταν στην είσοδο εφαρμόσουμε το σήμα $x(t)$

(γ) Χρησιμοποιείστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να βρείτε την $y(t)$

1.8

Ένα συνεχούς χρόνου ΓΧΑ έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t-3) - e^{-7(t-3)}u(t-3)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

β) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (Χρησιμοποιήστε το περιβάλλον MATLAB)

γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο το σήμα

$$x(t) = 7 + 7cos(7t + \pi 2) \tag{1.1}$$

1.9

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \delta(t) + 5e^{-7t}u(t)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος και σχεδιάστε τη.

β) Ποια συχνότητα "ενισχύει" περισσότερο το σύστημα; Σε ποια συχνότητα, το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης παίρνει το μισό της μέγιστης τιμής; (Η συχνότητα αυτή αναφέρεται και ως $3dB$ συχνότητα, διότι σε dB κλίμακα, $10log \mid H(j\omega) \mid^2$, η απόκριση εκεί είναι 3.01 dB μικρότερη από την μέγιστη τιμή.)

γ) Ποιά είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η

$$x(t) = 1 + 2cos(100t) \tag{1.2}$$

1.10

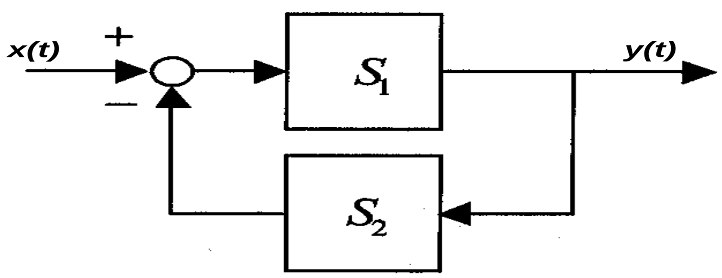
Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t).$$

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

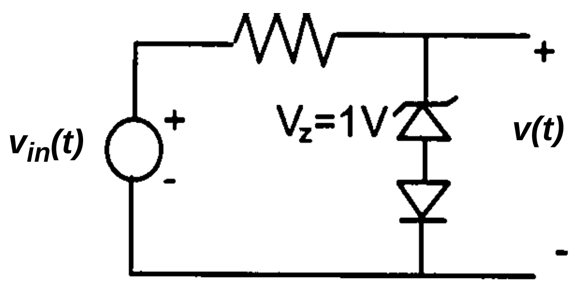
1.11

θεωρείστε το παρακάτω σύστημα με ανάδραση που αποτελείται από δύο ΓΧΑ συστήματα των οποίων η λειτουργία εκφράζεται μέσα απο τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις



$$\begin{aligned} S_1: \quad & \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ S_2: \quad & \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \end{aligned}$$

Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος και σχεδιάστε τη με τη βοήθεια της MATLAB. Αν στην είσοδο έχουμε την βηματική συνάρτηση, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος (βηματική απόκριση). Σχεδιάστε στο Simulink το σύστημα και επιβεβαιώστε το γεγονός, ότι αν το αντικαταστήσουμε με το συνολικό σύστημα που προκύπτει, η έξοδος παραμένει η ίδια.



1.12

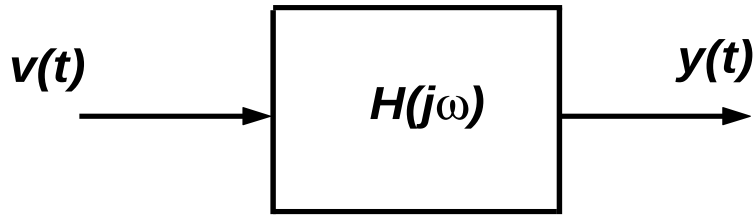
Το παρακάτω κύκλωμα με τη δίοδο Zener αποτελεί έναν ιδανικό ψαλιδιστή. Σχεδιάστε την έξοδο του κυκλώματος και υπολογίστε τον MF της εξόδου όταν η τάση εισόδου δίνεται από τη σχέση

$$v_{in}(t) = (t+2)u(t+2) - 2tu(t) + (t-2)u(t-2) \ \ Volts$$

και η τaση στην έξοδο είναι

$$v(t) = \begin{cases} v_{in}(t) & , \ v_{in}(t) < 1 \\ 1 & , \ v_{in}(t) \geq 1 \end{cases}$$

Έστω ότι η ψαλιδισμένη έξοδος περνάει μέσα από ένα ΓΧΑ του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι $H(j\omega) = j\omega$. Σχεδιάστε την έξοδό του, $y(t)$



1.13

Μια περιοδική συνάρτηση κρουστικών παλμών (periodic impulse train) ορίζεται από τον τύπο

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

(α) Σχεδιάστε το σήμα για $-3T_0 \leq t \leq 3T_0$

(β) Ποια είναι η βασική συχνότητα, ω_0, αν $T_0 = 10$. Χρησιμοποιείστε την τιμη $T_0 = 10$ για τα υπόλοιπα υποερωτήματα

(γ) Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier c_k, στην αναπαράσταση

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

(δ) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος για $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$

(ϵ) Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι η είσοδος ενός συστήματος με απόκριση συχνότητας

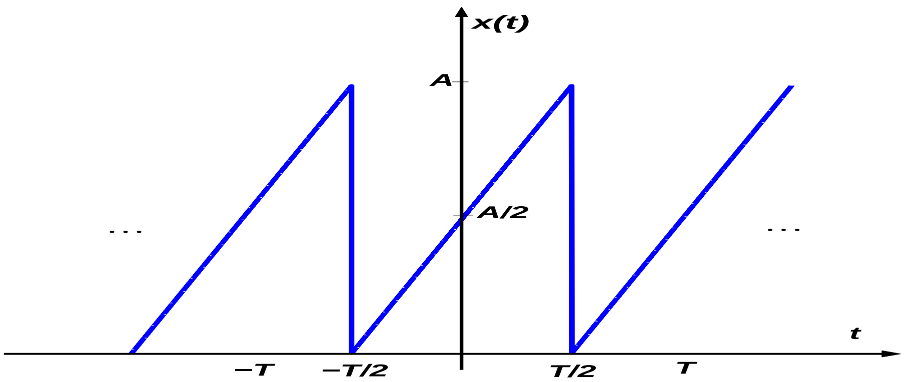
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-4j\omega} & \mid \omega \mid < \omega_{co} \\ 0 & \mid \omega \mid > \omega_{co} \end{cases}$$

με $\omega_{co} = \pi/T_0$, ποια είναι η έξοδος του συστήματος;

($\sigma\tau$) Αν $\omega_{co} = 3\pi/T_0$, ποια η έξοδος στην περίπτωση αυτή;

1.14

Βρείτε την βασική περίοδο T και τη βασική συχνότητα ω_0 του παρακάτω σήματος και υπολογίστε του συντελεστές c_k της αντίστοιχης σειράς Fourier. Εκφράστε το σήμα ως σειρά Fourier. Χρησιμοποιώντας το περιβάλλον MATLAB, σχεδιάστε το σήμα που προκύπτει για $5,\ 15,\ 250$ αρ-



μονικές (συντελεστές) και για $A = T = 1$.

1.15

Βρείτε τις σειρές Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο $T = 2\pi$

(α) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ 1 & t \in [0, \pi] \end{cases}$

(β) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in [0, \pi] \end{cases}$

(γ) $f(t) = \begin{cases} -t & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in (0, \pi] \end{cases} \qquad f(0) = 0$

(δ) $f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in [0, \pi] \end{cases}$

Σχεδιάστε στη MATLAB τα σήματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας 25 συντελεστές.