ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Εφαρμογες Της Ψηφιακης Επεξεργασιας Σηματων

Εκτιμηση Συχνοτητων Με ΙδιοΑναλυση του Μητρωου ΑυτοΣυσχετισης

Διδάσκων Επίκουρος Καθηγητής Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πάτρα Οκτώβριος 2015

Στοιχειωδης-Θεωρια

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε στην διάθεσή μας την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

$$\mathcal{X}(n) = \sum_{i=1}^{P} \mathcal{A}_i e^{jn\omega_i} + \mathcal{W}(n),\ n = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{1}$$

με $\mathcal{A}_i = |A_i| e^{j\phi_i}$, ϕ_i, $i = 1, 2, ..., P$ ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\pi,\ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma^2_{\mathcal{W}}$.

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τα $|A_i|$ τα ω_i, $i = 1, 2, ..., P$ καθώς και την διασπορά $\sigma^2_{\mathcal{W}}$ του λευκού θορύβου.

• Α. Στοχαστική Διαδιακασία Πρώτης Τάξης:

Στην περίπτωση αυτή η στοχαστική διαδικασία θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathcal{X}(n) = \mathcal{A}_1 e^{j\omega_1 n} + \mathcal{W}(n) = \mathcal{S}(n) + \mathcal{W}(n). \tag{2}$$

και για την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(k) &= \mathbb{E}\{\mathcal{X}(n+k)\mathcal{X}(n)\} \\
&= \mathbb{E}\{(A_1 e^{j\omega(n+k)} + \mathcal{W}(n+k))(A_1^* e^{-j\omega_1 n} + \mathcal{W}(n))\} \\
&= \mathbb{E}\{|A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \mathcal{W}(n+k)\mathcal{W}(n) + \\
&\quad A_1 e^{j\omega_1(n+k)}\mathcal{W}(n) + A_1^* e^{-j\omega_1 n}\mathcal{W}(n+k)\} \\
&= |A_1|^2 e^{j\omega_1 k} + \sigma^2_{\mathcal{W}}\delta(k)
\end{aligned} \tag{3}$$

Άρα το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας, μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(1) & \dots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(M-1) \\ r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-1) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(1) \\ r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-(M-1)) & \cdots & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(-1) & r_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(0) \end{bmatrix} \\
&= R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&= |A_1|^2 \mathbf{e}_M(\omega_1)\mathbf{e}_M^h(\omega_1) + \sigma^2_{\mathcal{W}} I_M
\end{aligned} \tag{4}$$

όπου

$$\mathbf{e}_M(\omega_1) = [\ 1 \quad e^{-j\omega_1} \quad e^{-2j\omega_1} \quad \dots \quad e^{-j(M-1)\omega_1}\ ]^h, \tag{5}$$

$R_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ ένα μητρώο τάξης 1 και $R_{\mathcal{W}\mathcal{W}}$ ένα διαγώνιο μητρώο τάξης M.

Από τις Σχέσεις (4) και (5) τελικά έχουμε:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}\mathbf{e}_M(\omega_1) = (M|A_1|^2 + \sigma^2_{\mathcal{W}})\mathbf{e}_M(\omega_1) \tag{6}$$

δηλαδή το διάνυσμα της Σχέσης (5) είναι ιδιοδιάνυσμα του μητρώου $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $M|A_1|^2 + \sigma^2_{\mathcal{W}}$. Επίσης, αν $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \cdots, \mathbf{n}_M$ είναι τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα του μητρώου, γνωρίζουμε ότι:

$$< \mathbf{e}_M(\omega_1), \mathbf{n}_m >= 0, \ m = 2, 3..., M \tag{7}$$

Επομένως, από τις (4) και (7) παίρνουμε:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}\mathbf{n}_m = \sigma^2_w \mathbf{n}_m = \lambda_m \mathbf{n}_m, \ m = 2, 3, ..., M,$$

δηλαδή για όλες τις ιδιοτιμές του $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$, εκτός της μεγαλύτερης, έχουμε ότι:

$$\lambda_m = \sigma^2_{\mathcal{W}}, \ m = 2, 3, ..., M \tag{8}$$

και από τις (6) και (8):

$$\lambda_{max} = \lambda_1 = M|A_1|^2 + \sigma^2_{\mathcal{W}}. \tag{9}$$

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί, εκτιμά τις ποσότητες που επιθυμούμε:

1. Ιδιο-ανάλυση του μητρώου αυτοσυσχέτισης $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ και εύρεση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής λ_1 και των υπολοίπων που γνωρίζουμε από την Σχέση (6) ότι είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

Επομένως:

$$\sigma^2_w = \lambda_{min}, \ \text{και} \tag{10}$$

$$|A_1|^2 = \frac{1}{M}(\lambda_{max} - \lambda_{min}) \tag{11}$$

2. Ξέρουμε από τη Σχέση (5) ότι $\mathbf{e}_M(\omega_1)$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου αυτοσυσχέτισης και επομένως

$$\mathbf{e}_M(\omega_1)[2] = e^{-j\omega_1}$$

και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση για να βρούμε το ω_1, δηλαδή:

$$\omega_1 = -jln(\mathbf{e}_M(\omega_1)[2]). \tag{12}$$

Ερωτησεις

1. Πώς μπορούμε να ορίσουμε τον Υπόχωρο του Σήματος (Signal Space) και
2. πώς τον Υπόχωρο του Θορύβου (Noise Space);
3. Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος της τυχαίας μεταβλητής ϕ στη Σχέση (2);

4. Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων, αν δεν υπήρχε αυτός ο παράγοντας; Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.
5. Υποθέστε οτι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαιών ποσοτήτων;[1]

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Άσκηση στο Matlab : Υπολογίστε το πλάτος την συχνότητα και την διασπορά του λευκού θορύβου στοχαστικής διαδικασίας πρώτης τάξης (δες Σχέση (2)), με μητρώο αυτοσυσχέτισης:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 2(1-j) \\ 2(1+j) & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Υποθέστε οτι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων; Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.
3. Άσκηση στο Matlab : Δημιουργήστε $N = 100$ (και επαναλάβετε για $N = 1000,\ 10000,\ 50000$) υλοποιήσεις (μήκους $M = 50$ δείγματα η κάθε μια) της ακόλουθης στοχαστικής διαδικασίας:

$$\mathcal{X}(n) = 3\sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{5}n+\phi)} + \mathcal{W}(n), \tag{13}$$

   όπου ϕ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi,\ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma^2_{\mathcal{W}} = 0.5$.

   Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας και εκτιμήστε:

   1 τη στοχαστική μέση τιμή

   2 το μητρώο αυτοσυσχέτισης $R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$ μεγέθους 50×50

   Χρησιμοποιήστε το παραπάνω μητρώο που εκτιμήσατε και δημιουργήστε τα ακόλουθα πέντε μητρώα:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X},\ M},\ M = 2, 10, 20, \cdots, 50$$

   μεγέθους $M \times M$ αντίστοιχα.

   Για κάθενα από τα παραπάνω μητρώα $M = 2, 10, 20, \cdots, 50$:

[1] Pisarenko, V. F. The retrieval of harmonics from a covariance function Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973

1 Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας κατάλληλη εντολή του Matlab, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{aligned} &\lambda_m,\ m = 1, 2, \cdots, M \\ &\mathbf{e}_M(\omega_1),\ \text{και} \\ &\mathbf{n}_m,\ m = 2, 3, \cdots, M \end{aligned} \tag{14}$$

αντίστοιχα.

2 Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις ιδιοτιμές $\lambda_m,\ m = 2, 3, \cdots, M$ που υπολογίσατε και εκτιμήστε την διασπορά $\sigma^2_{\mathcal{W}}$ του λευκού θορύβου. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των παραπάνω ιδιοτιμών και υπολογίστε της πρώτης και δεύτερης τάξης κεντρικές ροπές των. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

3 Χρησιμοποιήστε τη Σχέση (11) και την εκτίμηση της διασποράς του θορύβου και εκτιμήστε το πλάτος του σήματος. Σχολιάστε την εκτίμησή σας.

4 Ορίστε τα ακόλουθα τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

$$P_{(M,\ m)}(e^{j\omega}) = \mathbf{e}^h_M(\omega)\mathbf{n}_m,\ m = 2, 3, \cdots, M. \tag{15}$$

5 Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις $M - 1$ σχέσεις ορθογωνιότητας της Σχέσης (7) και τις ρίζες των παραπάνω πολυωνύμων και εκτιμήστε την συχνότητα ω_1. Σχολιάστε την ποιότητα της εκτιμήσης σας. Πώς απομονώσατε την ρίζα που σας ενδιέφερε; Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $kmeans()$ του Matlab με τα κατάλληλα ορίσματα. Σχολιάστε αναλυτικά.

6 Ορίστε τις ακόλουθες ρητές συναρτήσεις:

$$Q_{(M,\ m)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2},\ m = 2, 3, \cdots, M. \tag{16}$$

όπου $|P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|$ το μέτρο του $m-$ οστου μιγαδικού πολυωνύμου $P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})$ της Σχέσης (15). Σχεδιάστε τις παραπάνω συναρτήσεις και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

7 Ορίστε την ακόλουθη ρητή συνάρτηση:

$$Q^{MUSIC}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{m=2}^{M} |P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2}, \tag{17}$$

η οποία αποτελεί την συνάρτηση που βασίζονται οι εκτιμήσεις του αλγορίθμου MUSIC (MUltiple SIgnal Classification). Σχεδιάστε την παραπάνω συνάρτηση και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

8 Ορίστε την ακόλουθη ρητή συνάρτηση:

$$Q^{EV}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{m=2}^{M} \frac{1}{\lambda_m} |P_{(M,\ m)}(e^{j\omega})|^2}, \tag{18}$$

η οποία αποτελεί την συνάρτηση που βασίζονται οι εκτιμήσεις του αλγορίθμου EV(EigenVector). Σχεδιάστε την παραπάνω συνάρτηση και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

Σχολιάστε την ποιότητα των εκτιμήσεών σας καθώς το M αυξάνεται.

4. Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για διαφορετικές τιμές της ισχύος του θορύβου $\sigma^2_{\mathcal{W}}$ και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

• B. Στοχαστική Διαδιακασία P-οστής Τάξης

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία συντίθεται από P φανταστικά εκθετικά σήματα. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο αυτοσυσχέτισης θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = E(\omega)\Lambda E(\omega)^h + \sigma^2_{\mathcal{W}} I$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^{P} |A_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i)\mathbf{e}_M^h(\omega_i) + \sigma^2_{\mathcal{W}} I \\ &= R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \end{aligned} \tag{19}$$

όπου:

$$R_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{P} |A_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i)\mathbf{e}_M^h(\omega_i) \tag{20}$$

$$R_{\mathcal{W}\mathcal{W}} = \sigma^2_{\mathcal{W}} I. \tag{21}$$

Από τις Σχέσεις (20), (21) είναι φανερό ότι τα μεγέθους $M \times M$ μητρώα $R_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ και $R_{\mathcal{W}\mathcal{W}}$ είναι τάξης P και $M - P$ αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι U είναι ένα μητρώο που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης της Σχέσης (19). Τότε, μπορούμε να χωρίσουμε το μητρώο U σε δύο τμήματα. Το πρώτο, το οποίο θα συμβολίσουμε ως U_S θα περιέχει τα πρώτα P ιδιοδιανύσματα και θα αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του σήματος και το δεύτερο, το οποίο θα συμβολίσουμε ως U_N θα περιέχει τα υπόλοιπα $M - P$ ιδιοδιανύσματα και θα αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του θορύβου. Για τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι προφανές ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$< \mathbf{e}_M(\omega_i),\ \mathbf{u}_m >= 0,\ \forall\ i = 1, 2, ..., P \text{ και } m = P+1, P+2, ..., M. \tag{22}$$

Ερωτησεις

1. Πώς μπορούμε να ορίσουμε στην γενική περίπτωση τον Υπόχωρο του Σήματος και
2. πώς τον Υπόχωρο του Θορύβου ;

3. Ποιός είναι κατά την γνώμη σας ο ρόλος των τυχαίων μεταβλητών $\phi_i,\ i = 1, 2, \cdots, P$ στη Σχέση (17);

4. Τι θα άλλαζε στον υπολογισμό του μητρώου αυτοσυσχέτισης, αν δεν ήταν αυτές οι τυχαίες μεταβλητές ασυσχέτιστες; Καταγράψτε αναλυτικά τις απόψεις σας.

5. Υποθέστε οτι είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Ποιό κατά την γνώμη σας είναι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου που θα επιτρέψει τον υπολογισμό των αναγκαιών ποσοτήτων (δες την αντίστοιχη ερώτηση του μέρους Α της άσκησης); [2]

6. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, γενικά, τα διανύσματα $\mathbf{e}_M(\omega_i),\ i = 1, 2, \cdots, P$ δεν είναι ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτοσυσχέτισης. Ποιές θα πρέπει να είναι οι συχνότητες $\omega_i,\ i = 1, 2, \cdots, P$ για να ισχύει αυτό ; Καταγράψετε την απάντησή σας.

---

[2] Στην περίπτωση της στοχαστικής διαδικασίας P-οστής τάξης και για $M = P + 1$ (τεχνική Pisarenko), η Σχέση (22) γίνεται:

$$< e_{P+1}(e^{j\omega_i}), \mathbf{u}_{P+1} >= 0,\ \omega_i, i = 1, 2, ..., P.$$

Άρα, βρίσκοντας τις ρίζες του πολυωνύμου που εκφράζει το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:

$$< \mathbf{e}_{P+1}(e^{j\omega}), \mathbf{u}_{P+1} >,$$

βρίσκουμε τις ζητούμενες συχνότητες.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τώρα τα πλάτη, πολλαπλασιάζουμε το μητρώο R_{xx} της Σχέσης (19) με κάθε στήλη του μητρώου U_S δηλαδή με τα διανύσματα βάσης του χώρου σήματος, ως εξής:

$$\mathbf{u}_{S,j}^h R_{xx} \mathbf{u}_{S,j} = \sum_{i=1}^{P} |A_i|^2 \mathbf{u}_{S,j}^h \mathbf{e}_{P+1}(\omega_i) \mathbf{e}_{P+1}^h(\omega_i) \mathbf{u}_{S,j} + \sigma_w^2 \|\mathbf{u}_{S,j}\|_2^2,\ j = 1, 2, \cdots, P.$$

Οι παραπάνω σχέσεις, παίρνοντας υπόψη μας ότι $|\mathbf{u}_{S,j}|_2^2 = 1,\ j = 1, 2, \cdots, P$, μπορούν να γραφούν σε μορφή γραμμικού συστήματος ως ακολούθως:

$$\mathbf{p} - \sigma_w^2 \mathbf{1}_P = M\mathbf{a}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{S,1}^h R_{xx} \mathbf{u}_{S,1} & \mathbf{u}_{S,2}^h R_{xx} \mathbf{u}_{S,2} & \cdots & \mathbf{u}_{S,P}^h R_{xx} \mathbf{u}_{S,P} \end{bmatrix}^t \\
M &= \begin{bmatrix} |< \mathbf{u}_{S,1},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_1) >|^2 \cdots & |< \mathbf{u}_{S,1},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_P) >|^2 \\ |< \mathbf{u}_{S,2},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_1) >|^2 \cdots & |< \mathbf{u}_{S,2},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_P) >|^2 \\ \vdots & \\ |< \mathbf{u}_{S,P},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_1) >|^2 \cdots & |< \mathbf{u}_{S,P},\ \mathbf{e}_{P+1}(\omega_P) >|^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{a} &= \begin{bmatrix} |A_1|^2 & |A_2|^2 & \cdots & |A_P|^2 \end{bmatrix}^t \\
\mathbf{1}_P &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^t
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι έχουμε ήδη υπολογίσει τις συχνότητες και η διασπορά του θορύβου έχει εκτιμηθεί, η λύση του παραπάνω συστήματος οδηγεί στον υπολογισμό των πλατών. Σημείωση: Εάν τα διανύσματα βάσης του χώρου σήματος ήταν κάθετα μεταξύ τους, τότε το παραπάνω μητρώο θα ήταν διαγώνιο και η λύση θα ήταν η ακόλουθη: $|A_i| = \sqrt{\mathbf{u}_{S,i}^h R_{xx} \mathbf{u}_{S,i}},\ i = 1, 2, \cdots, P$.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Άσκηση στο Matlab : Υπολογίστε τα πλάτη, τις συχνότητες και την διασπορά του λευκού θορύβου στοχαστικής διαδικασίας δεύτερης τάξης με το ακόλουθο μητρώο αυτοσυσχέτισης:

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 6 & 1.92705 - j4.58522 & -3.42705 - j3.49541 \\ 1.92705 + j4.58522 & 6 & 1.92705 - j4.58522 \\ -3.42705 + j3.49541 & 1.92705 + j4.58522 & 6 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα που ανήκει στον υπόχωρο του θορύβου είναι το $\mathbf{u}_3$. Άρα

$$< \mathbf{e}_3(\omega_i), \mathbf{u}_3 >= 0, \ i = 1, 2.$$

Αν επομένως ορίσουμε και πάλι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο της Σχέσης (15), τότε οι επιθυμητές συχνότητες μπορούν να προκύψουν από τον υπολογισμό των ριζών του παραπάνω πολυωνύμου (επιβεβαιώστε). Σχεδιάστε το ακόλουθο πολυώνυμο:

$$P_{inv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας

2. Υποθέστε οτι δεν είστε σε θέση να γνωρίζετε το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας αλλά μόνο να το εκτιμήσετε από ένα αριθμό N διαφορετικών υλοποιήσεων της (μήκους M δειγμάτων η κάθε μια) που σας δίνονται. Ποιός κατά την γνώμη σας είναι ο ρόλος του M και του N στην εκτίμηση των τιμών των αναγκαίων ποσοτήτων; Καταγράψτε αναλυτικά και θεμελιώστε, με αναφορά σε μαθηματικούς νόμους, την άποψή σας.

3. Άσκηση στο Matlab : Δημιουργήστε $N = 100$ υλοποιήσεις (μήκους $M = 50$ δείγματα η κάθε μια) στοχαστικής διαδικασίας της Σχέσης (1) με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2^{i-1}} e^{j\phi_i}, \ i = 1, 2, \cdots, 5 \tag{23}$$

$$\omega_1 = 0.2\pi$$

$$\omega_2 = 0.4\pi$$

$$\omega_3 = 0.5\pi$$

$$\omega_4 = 0.75\pi$$

$$\omega_5 = 0.88\pi \tag{24}$$

$$\sigma^2_{\mathcal{W}} = 0.75 \tag{25}$$

όπου $\phi_i, \ i = 1, 2, \cdots, 5$ τυχαίες ασυσχέτιστες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\pi, \ \pi]$ και $\mathcal{W}(n)$ λευκός γκαουσιανός θόρυβος διασποράς $\sigma^2_{\mathcal{W}} = 0.5$.

Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας και:

1 επαναλάβετε τη διαδικασία του πρώτου μέρους, με τις αναγκαίες τροποποιήσεις, και καταγράψτε τα συμεράσματά σας.

2 χρησιμοποιείστε διαφορετικές συχνότητες, και εκτιμήστε τη ρωμαλεότητα των διαφορετικών τεχνικών εκτίμησης των παραμέτρων. Καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.