

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 8 ΑΣΚΗΣΗ



Μετατροπή Ψηφιακού Σήματος σε Αναλογικό – Τεχνική Σίγμα-Δέλτα

1 Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με μια τεχνική η οποία χρησιμοποιείται ευρέως σε περιπτώσεις όπου ένα ψηφιακά αποθηκευμένο σήμα πρέπει να μετατραπεί ξανά σε αναλογικό. Η περίπτωση αυτή συναντάται για παράδειγμα όταν ένα μουσικό κομμάτι το οποίο βρίσκεται αποθηκευμένο σε έναν ψηφιακό δίσκο, χρειάζεται να μετατραπεί σε αναλογικό με σκοπό την αναπαραγωγή του. Στην περίπτωση αυτή, το αποθηκευμένο μουσικό κομμάτι θα πρέπει αρχικά να μετατραπεί σε αναλογικό με τη χρήση ενός μετατροπέα ψηφιακού σε αναλογικό (Digital to Analog Converter, DAC), και στη συνέχεια το αναλογικό σήμα να περάσει από ένα αναλογικό φίλτρο ανακατασκευής [2]. Η διαδικασία αυτή ωστόσο, απαιτεί τη χρήση ενός DAC με ακρίβεια 16 δυαδικών ψηφίων ανά δείγμα, επειδή το πρότυπο του ψηφιακού δίσκου υπαγορεύει τη χρήση αυτής της ακρίβειας αναπαράστασης, ο οποίος μάλιστα θα πρέπει να λειτουργεί στη συχνότητα των 44.1 khz. Στην πράξη, ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα με αυτές τις προδιαγραφές είναι πολύ ακριβό να κατασκευαστεί. Αντίθετα, μετατροπείς ψηφιακού σε αναλογικό με χαμηλότερη ακρίβεια αναπαράστασης είναι φθηνότερο να κατασκευαστούν ακόμα και στην περίπτωση όπου αυτοί απαιτείται να λειτουργούν σε συχνότητες ρολογιού πολλαπλάσιες των 44.1 khz. Στα επόμενα, θα εξετάσουμε μια τεχνική με βάση την οποία είναι δυνατόν να πετύχουμε την επιθυμητή ανακατασκευή του αναλογικού σήματος χρησιμοποιώντας έναν μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό, αριθμητικής ακρίβειας μόλις ενός δυαδικού ψηφίου, χωρίς υποβάθμιση της ποιότητας που απαιτείται για την αναπαραγωγή ενός ψηφιακού δίσκου.

2 Η Κωδικοποίηση Σίγμα-Δέλτα

Όπως περιγράψαμε και παραπάνω, το ζητούμενο της άσκησης αυτής είναι η ανακατασκευή ενός αναλογικού σήματος με αφετηρία το ψηφιακά αποθηκευμένο σήμα, κάνοντας χρήση ενός DAC με χαμηλή ακρίβεια αναπαράστασης. Σε προηγούμενη εργαστηριακή άσκηση ασχοληθήκαμε με την κωδικοποίηση δέλτα, όπου για την κωδικοποίηση ενός σήματος δημιουργείται αρχικά μια εκτίμηση $\hat{f}(n-1)$ του αρχικού σήματος $f(n)$

και στη συνέχεια κωδικοποιείται το σήμα λάθους $e(n) = f(n) - \hat{f}(n - 1)$ το οποίο αποτελεί μια εκτίμηση της διαφοράς των γειτονικών δειγμάτων του αρχικού σήματος. Την ιδιότητα αυτή, ότι δηλαδή γειτονικά δείγματα ενός συνεχούς σήματος έχουν περίπου την ίδια τιμή, θα εκμεταλλευτούμε και εδώ. Για να τονίσουμε την ιδιότητα αυτή, στο σύστημα που θα εξετάσουμε εδώ, το αρχικό ψηφιακό σήμα $f(n)$ περνάει από ένα σύστημα ψηφιακής παρεμβολής [2], το οποίο αποτελείται από έναν υπερδειγματολήπτη τάξης M και από ένα γραμμικό FIR φίλτρο μήκους $2M - 1$. Γειτονικά δείγματα του νέου ψηφιακού σήματος $f(k)$ το οποίο προκύπτει από τη διαδικασία αυτή, παρουσιάζουν πολύ μεγαλύτερη ομοιότητα.

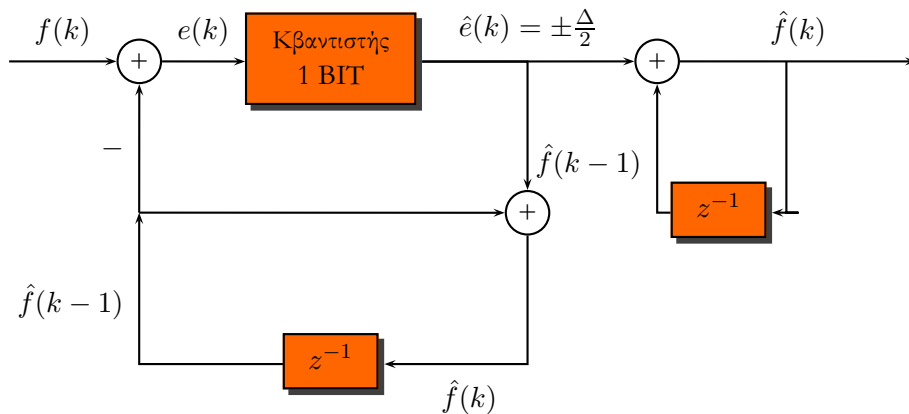
Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται η δομή ενός συστήματος κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης δέλτα. Με αφετηρία το σύστημα αυτό, και με κατάλληλους μετασχηματισμούς θα προκύψει το σύστημα της κωδικοποίησης Σίγμα-Δέλτα. Αρχικά, διαπιστώνουμε πως η διάταξη του αποκωδικοποιητή είναι ένα σύστημα ψηφιακής ολοκλήρωσης το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Παρατηρούμε ακόμα πως το υποσύστημα αυτό παρουσιάζεται και στη δομή του κωδικοποιητή δέλτα, και πιο συγκεκριμένα αποτελεί το βρόχο ανάδρασής του. Χρησιμοποιώντας τώρα μια ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων η οποία αναφέρει πως είναι δυνατό να εναλλάξουμε τη σειρά δύο οποιονδήποτε γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων συστημάτων χωρίς να μεταβληθεί η απόκριση του συνολικού συστήματος, καταλήγουμε στο σύστημα του Σχήματος 3.¹ Στο Σχήμα αυτό, η βαθμίδα ψηφιακής ολοκλήρωσης έχει απεικονισθεί με το σύμβολο Σ . Χρησιμοποιώντας τώρα την ακόλουθη ταυτότητα

$$\sum_{k=-\infty}^l f(k) - \sum_{n=-\infty}^l \hat{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^l (f(k) - \hat{f}(k))$$

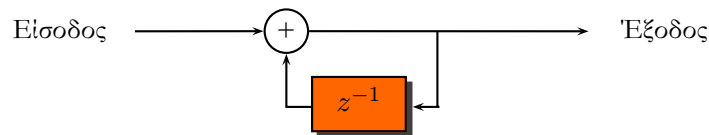
το σύστημα του Σχήματος 3 μετατρέπεται στο ισοδύναμο σύστημα του Σχήματος 4. Το τελευταίο σύστημα αποτελεί τον κωδικοποιητή Σίγμα-Δέλτα. Στην έξοδο του συστήματος αυτού, μπορούμε να προσθέσουμε έναν μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό αριθμητικής ακρίβειας ενός δυαδικού ψηφίου, και στη συνέχεια ένα αναλογικό φίλτρο ανακατασκευής. Το παραπάνω σύστημα ανακατασκευής χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλά εμπορικά συστήματα αναπαραγωγής μουσικής.

Το όνομα της τεχνικής σίγμα-δέλτα προκύπτει ακριβώς επειδή χρησιμοποιείται ένας αθροιστής και στη συνέχεια ένα σύστημα κωδικοποίησης δέλτα (Σχήμα 4). Ο θόρυβος κβάντισης ο οποίος εισάγεται από τον κωδικοποιητή αυτό παρουσιάζει διαφορετική ισχύ ως προς τη συχνότητα, πρόκειται δηλαδή για "χρωματισμένο" θόρυβο. Πιο συγκεκριμένα, ο βρόχος ανάδρασης επιδρά ως κατωπερατό φίλτρο στο σήμα εισόδου και ως ανωπερατό φίλτρο στο σήμα του θορύβου κβάντισης. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα επιθυμητή σε εφαρμογές αναπαραγωγής μουσικών κομματιών.

¹ Στην περίπτωση μας, η εναλλαγή των υποσυστημάτων κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης καταλήγει σε ένα σύστημα το οποίο δεν είναι αυστηρά ισοδύναμο με το αρχικό. Αυτό συμβαίνει διότι το υποσύστημα του κωδικοποιητή περιέχει τη διάταξη του κβαντιστή ο οποίος είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο και καθιστά το υποσύστημα αυτό μη γραμμικό. Ωστόσο, εάν το σήμα λάθους λαμβάνει τιμές κοντά στις τιμές $\Delta/2$ και $-\Delta/2$, τότε το στοιχείο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως σχεδόν γραμμικό



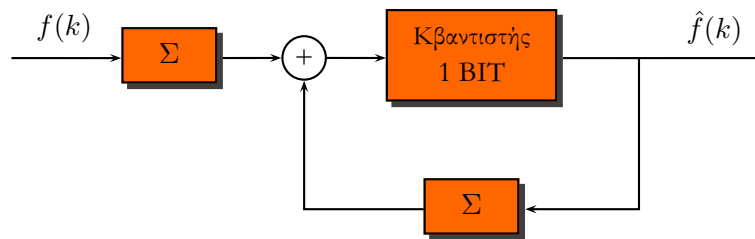
Σχήμα 1: Δομή του κωδικοποιητή και του αποκωδικοποιητή δέλτα



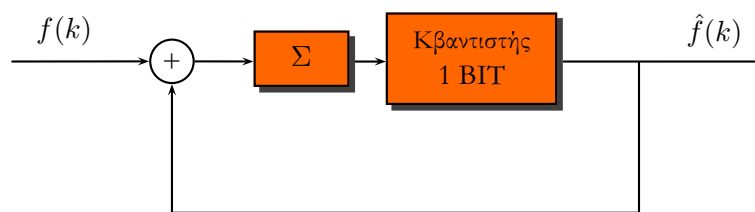
Σχήμα 2: Δομή ενός ψηφιακού ολοκληρωτή

3 Ερωτήματα

1. Χρησιμοποιώντας το περιβάλλον MATLAB δημιουργήστε ένα σήμα πεπερασμένου εύρους ζώνης ως άθροισμα 10 ημιτονικών σημάτων. Στη συνέχεια δειγματοληψήστε το σήμα αυτό αλλά με συχνότητα 10 φορές μεγαλύτερη από το όριο Nyquist. Στη συνέχεια υποδειγματοληψήστε το σήμα αυτό κατά έναν παράγοντα 5.
2. Υλοποιήστε ένα σύστημα ψηφιακής παρεμβολής. Χρησιμοποιήστε βαθμό υπερδειγματοληψίας $M = 5$ καθώς και (α) τετραγωνικό (β) τριγωνικό και (γ) Kaiser παράθυρο για το φίλτρο παρεμβολής. Εφαρμόστε το σύστημα παρεμβολής στο υποδειγματοληπτημένο σήμα του προηγούμενου ερωτήματος και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ανάμεσα στην έξοδο του συστήματος παρεμβολής και στο αρχικό σήμα του προηγούμενου ερωτήματος, για κάθε ένα τα παράθυρα που αναφέραμε.
3. Επαναλάβετε τη διαδικασία του προηγούμενου ερωτήματος όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα παρεμβολής έχει πρώτα υποστεί κβάντιση σε 256 στάθμες.
4. Υλοποιήστε το σύστημα της κωδικοποίησης Σίγμα-Δέλτα και μαζί με το σύστημα παρεμβολής που υλοποιήσατε, δημιουργήστε μια ανακατασκευή του αρχικού σήματος. Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ανάμεσα στο αρχικό και το ανακατασκευασμένο σήμα.



Σχήμα 3: Εναλλαγή των βαθμίδων κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης



Σχήμα 4: Δομή του κωδικοποιητή Σίγμα-Δέλτα

Βιβλιογραφία

- [1] Craig Marven and Gillian Ewers, "*A Simple Approach to Digital Signal Processing*", Wiley-Interscience Publications, 1996
- [2] Γεώργιος Μουστακίδης, "*Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*", Εκδόσεις Τζιόλα, 2003.
- [3] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.