ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 10

Στοιχεία Θεωρίας Στατιστικού Ελέγχου Υποθέσεων και Συμπερασματολογίας

1. Εισαγωγή-Βασικές έννοιες

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(x;\boldsymbol{\theta})$ γνωστής συναρτησιακής μορφής η οποία εξαρτάται από την r-διάστατη παράμετρο $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\ \theta_2\ ...\ \theta_r]^t$. Οι δυνατές τιμές αυτής της παραμέτρου ορίζουν τον παραμετρικό χώρο $\boldsymbol{\Omega}$ ο οποίος συνήθως είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\Re^r$, $r \geq 1$. Στην πραγματικότητα η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ έχει μία συγκεκριμένη σταθερή τιμή στον παραμετρικό χώρο $\boldsymbol{\Omega}$ την οποία ονομάζουμε *αληθή* η οποία ωστόσο είναι άγνωστη. Είναι όμως δυνατόν να καθορίσουμε ένα υποσύνολο $\mathcal{P}_0$ του παραμετρικού χώρου $\mathcal{P}$ που περιέχει την αληθή τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$. Ο καθορισμός αυτού του υποσυνόλου ισοδυναμεί με την διατύπωση μίας *στατιστικής υπόθεσης*. Επομένως, ο καθορισμός ενός υποσυνόλου $\boldsymbol{\Omega}_0$ του παραμετρικού χώρου $\boldsymbol{\Omega}$ ως περιέχοντος την αληθή τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ καλείται στατιστική υπόθεση για το $\boldsymbol{\theta}$ και συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{H}_0$ ή απλά με $\mathcal{H}$ και είναι γνωστή ως *μηδενική υπόθεση*. Ο καθορισμός επίσης του συνόλου $\boldsymbol{\Omega}_1= \boldsymbol{\Omega}_0^c$ (του συμπληρώματος δηλαδή του $\boldsymbol{\Omega}_0$ ως προς το $\boldsymbol{\Omega}$) ως περιέχοντος την αληθή τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ αποτελεί μία στατιστική υπόθεση για το $\boldsymbol{\theta}$ και η οποία συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{H}_1$ ή απλά με $\mathcal{A}$ και είναι γνωστή ως *εναλλακτική* προς την υπόθεση $\mathcal{H}_0$. Συμβολικά γράφουμε:

$$\mathcal{H}_0: \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Omega}_0 \subseteq \boldsymbol{\Omega}$$
$$\mathcal{H}_1: \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Omega}_1 \subseteq \boldsymbol{\Omega}. \tag{1}$$

Θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι τα υποσύνολα του παραμετρικού χώρου $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}_0$ και $\boldsymbol{\Omega}_1$, είναι μονοσύνολα. Δηλαδή $\boldsymbol{\Omega}_0=\{\boldsymbol{\theta}_0\}$ και $\boldsymbol{\Omega}_1=\{\boldsymbol{\theta}_1\}$. Στην περίπτωση αυτή οι υποθέσεις που ορίσθηκαν στη Σχέση (1) οναμάζονται *απλές*.

Το ερώτημα που τίθεται στη συνέχεια είναι κατά ποιό τρόπο μπορεί να ελεχθεί η υπόθεση αυτή.

Στα πλαίσια της θεωρίας ελέγχου υποθέσεων ο παραπάνω έλεγχος γίνεται με την βοήθεια ενός δείγματος από την εν λόγω κατανομή και με την βοήθεια μίας στατιστικής συνάρτησης (σ.σ.) η οποία είναι γνωστή ως ελεγχοσυνάρτηση ή ανιχνευτής ή κανόνας απόφασης. Συγκεκριμένα, έστω

$$\mathsf{X}=[\mathsf{X}_0\,\mathsf{X}_1\,\ldots\,\mathsf{X}_{N\text{-}1}]^t \tag{2}$$

ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) μεγέθους N και έστω

$$\mathbf{x}=[\mathrm{x}_0\,\mathrm{x}_1\,\ldots\,\mathrm{x}_{N\text{-}1}]^t \tag{3}$$

οι παρατηρηθείσες τιμές των τ.μ. X_0, X_1, ..., $\mathsf{X}_{N\text{-}1}$ κάθε μία από της οποίες, όπως είπαμε, έχει σαν σ.π.π. την $f(\mathrm{x};\boldsymbol{\theta}_i)$, i=0, 1. Ας συμβολίσουμε επίσης με $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ την από κοινού π.π. του τ.δ. X και ας θεωρήσουμε ότι αυτές είναι γνωστές εκ των προτέρων.

Με κάθε υλοποίηση $\mathbf{x}$ του τυχαίου δείγματος X που μας διατίθεται, καλούμαστε να αποφασίσουμε αν οι παρατηρήσεις κατανέμονται σύμφωνα με την π.π. $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)$ ή $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)$. Μία ελεγχοσυνάρτηση $\delta(\mathbf{x})$ ή ανιχνευτής θα πρέπει να βασίζεται επομένως αποκλειστικά στις διαθέσιμες παρατηρήσεις $\mathbf{x}$ όπως και στην εκ των προτέρων γνώση των δύο σ.π.π..

Αν ακολουθήσουμε μία *ντετερμινιστική* πολιτική κατά τη λήψη της απόφασης τότε σε κάθε $\mathbf{x}\in\mathcal{R}^N$ η ελεγχοσυνάρτηση θα πρέπει να αντιστοιχίζει μία μοναδική επιλογή ($\mathcal{H}_0$ ή $\mathcal{H}_1$). Συγκεντρώνοντας όλα τα $\mathbf{x}\in\mathcal{R}^N$ για τα οποία η ελεγχοσυνάρτηση επιλέγει την $\mathcal{H}_1$ και ορίζοντας το ακόλουθο σύνολο

$$\mathbb{S}_1=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N\text{: η επιλογή της ελεγχοσυναρτήσεως } \delta(\mathbf{x}) \text{ είναι η } \mathcal{H}_1\ \}, \tag{4}$$

τότε είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathbb{S}_1$ είναι υποσύνολο του χώρου $\mathcal{R}^N$.

Είναι επίσης προφανές ότι αν κάποιο $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο σύνολο $\mathbb{S}_1$ αλλά στο συμπλήρωμά του $\mathbb{S}_0$, τότε η ελεγχοσυνάρτηση θα επιλέγει την $\mathcal{H}_0$ και επομένως το σύνολο $\mathbb{S}_0$ θα περιέχει όλα τα $\mathbf{x}$ για τα οποία η ελεγχοσυνάρτηση επιλέγει την $\mathcal{H}_0$.

Η γενίκευση της δυαδικής περίπτωσης που παραθέσαμε παραπάνω, μπορεί να γίνει με σχετικά εύκολο τρόπο. Αν δηλαδή οι παρατηρήσεις μας μπορούν να προέλθουν από M διαφορετικές (αλλά γνωστές) σ.π.π. $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_i)$, $i=0,\ldots,M-1$ τότε, έχουμε τις ακόλουθες απλές υποθέσεις:

$$\mathcal{H}_0: \mathsf{X} \sim f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) \ \ (\text{ή } \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0)$$

$$\mathcal{H}_1: \mathsf{X} \sim f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1) \ \ (\text{ή } \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\mathcal{H}_{M-1}: \mathrm{X} \sim f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_{M-1}) \;\; (\text{ή } \boldsymbol{\theta}= \boldsymbol{\theta}_{M-1}),$$

και στόχος μας είναι η επιλογή μίας εκ των παραπάνω υποθέσων.

Είναι προφανές ότι η ντετερμινιστή λογική λήψης αποφάσεων, οφείλει να διαμερίσει τον χώρο $\Re^N$ σε M υποσύνολα $\mathbb{S}_i$, i=0, 1, …, M-1, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους ($\mathbb{S}_i \cap \mathbb{S}_j = \emptyset$, $i \neq j$) και καλύπτουν πλήρως τον χώρο $\Re^N$, δηλαδή $\cup_{i=0}^{M-1} \mathbb{S}_i = \Re^N$.

Το επόμενο λογικό βήμα αποτελεί ο καθορισμός της διαμέρισης του χώρου ή ισοδύναμα ο βέλτιστος ορισμός της ελεγχοσυναρτήσεως $\delta(\mathbf{x})$. Ωστόσο, πριν από αυτό θα ορίσουμε μη ντετερμινιστικές ελεγχοσυναρτήσεις (τις οποίες θα αναφέρουμε ως τυχαιοποιημένες), κανόνες δηλαδή που εμπεριέχουν το στοιχείο της τυχαιότητας.

Όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι ντετερμινιστικές ελεγχοσυναρτήσεις αντιστοιχούν μία μοναδική επιλογή $\mathcal{H}_i$ σε κάθε σημείο $\mathbf{x} \in \Re^N$. Οι τυχαιοποιημένες ελεγχοσυναρτήσεις δεν υπόκεινται σε αυτόν τον περιορισμό, μπορούν να αντιστοιχούν όλες τις δυνατές υποθέσεις σε κάθε σημείο του χώρου $\Re^N$. Η επιλογή συγκεκριμένης υπόθεσης γίνεται με την βοήθεια ενός παιγνιδιού τύχης στο οποίο λαμβάνεται απόφαση υπέρ της υπόθεσης $\mathcal{H}_i$ με πιθανότητα $\delta_i(\mathbf{x})$, i=0, 1, …, M-1. Επομένως, σε ένα πρόβλημα ελέγχου M υποθέσεων $\mathcal{H}_i$, i=0, 1, …, M-1 ένας τυχαιοποιημένος κανόνας απόφασης που βασίζεται στις παρατηρήσεις $\mathbf{x} \in \Re^N$, καθορίζεται από τις τυχαιοποιημένες ελεγχοσυναρτήσεις $\delta_i(\mathbf{x})$, i=0, 1, …, M-1 στις οποίες η $\delta_i(\mathbf{x})$ εκφράζει την πιθανότητα με την οποία η υπόθεση $\mathcal{H}_i$ επιλέγεται σε ένα παιχνίδι τύχης.

Οι τυχαιοποιημένοι κανόνες αποτελούν γενικεύσεις των ντετερμινιστικών κανόνων απόφασης. Για να το δούμε αυτό ας ορίσουμε την *δείκτρια* συνάρτηση ενός συνόλου $\mathcal{B}$, δηλαδή

$$\mathbf{1}_{\mathcal{B}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{B} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}. \end{cases} \tag{5}$$

Με την βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης ένας ντετερμινιστικός κανόνας απόφασης που διαμερίζει τον χώρο $\Re^N$ στα σύνολα $\mathbb{S}_i$,i=0, 1, …, M-1, μπορεί να εκφραστεί ως τυχαιοποιημένος αν επιλέξουμε σαν πιθανότητες απόφασεις τις ελεγχοσυναρτήσεις $\delta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\mathbb{S}_i}$, i=0, 1, …, M-1. Πράγματι, εξαιτίας του ότι τα σύνολα $\mathbb{S}_i$ είναι ξένα μεταξύ τους και καλύπτουν όλο τον $\Re^N$, αν $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_k$, τότε $\delta_k(\mathbf{x})=1$ ενώ όλες οι υπόλοιπες πιθανότητες γίνονται μηδέν. Δηλαδή με πιθανότητα 1 (δηλαδή με ντετερμινιστικό τρόπο) επιλέγεται η υπόθεση $\mathcal{H}_k$.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης άσκησης θα περιορίσουμε την ανάλυσή μας μόνο στις περιπτώσεις όπου οι ανταγωνιζόμενες υποθέσεις είναι δύο, οπότε έχουμε το πρόβλημα του ελέγχου *δυαδικών* υποθέσεων (binary hypothesis testing). Στην περίπτωση αυτή είναι επομένως απαραίτητο να καθοριστούν οι δύο πιθανότητες απόφασης (ή ισοδύναμα οι ελεγχοσυναρτήσεις) $\delta_i(\mathbf{x})$, i=0,1.

2. Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Σε ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων, όπως αυτό που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε στα πλαίσια της άσκησης αυτής, έχουν ενδιαφέρον τα ακόλουθα *γεγονότα*:

$$\{\mathcal{O}_i \,\&\, \mathcal{H}_j\} = \{\text{Αποφασίζουμε υπέρ της υπόθεσης } \mathcal{H}_i, \text{ ενώ οι παρατηρήσεις ακολουθούν στην πραγματικότητα την υπόθεση } \mathcal{H}_j\}. \tag{6}$$

Στην περίπτωση δυαδικών υποθέσεων, την οποία όπως είπαμε και εξετάζουμε, υπάρχουν τέσσερα γεγονότα της μορφής αυτής. Συγκεκριμένα μπορούμε να ορίσουμε τα ακόλουθα γεγονότα:

$$\begin{aligned}&\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_0\}: \text{Σωστή Απόφαση}\\ &\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_0\}: \text{Λάθος Απόφαση}\\ &\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_1\}: \text{Σωστή Απόφαση}\\ &\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_1\}: \text{Λάθος Απόφαση.}\end{aligned} \tag{7}$$

Σε μια αντιμετώπιση του προβλήματος κατά Bayes, σε κάθε ένα από τα γεγονότα της Σχέσης (7), αντιστοιχούμε μία ζημία ή κόστος απόφασης L_{ij}. Οι τιμές των τεσσάρων αυτών παραμέτρων θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστές και σταθερές ποσότητες. Με την βοήθεια των παραπάνω ποσοτήτων μπορούμε τώρα να ορίσουμε την ακόλουθη συνάρτηση διακινδύνευσης ή μέσης ζημίας, η οποία εξαρτάται από τον κανόνα απόφασης και επομένως από τις ελεγχοσυναρτήσεις $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})=[\delta_0(\mathbf{x})\ \delta_1(\mathbf{x})]^t$:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta})= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} L_{ij}\mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i \,\&\, \mathcal{H}_j\}). \tag{8}$$

Έχοντας ορίσει την συνάρτηση κόστους, στη συνέχεια αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να επιλέξουμε τις ελεγχοσυναρτήσεις έτσι ώστε το κόστος να ελαχιστοποιείται.
Χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i \,\&\, \mathcal{H}_j\})= \mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i | \mathcal{H}_j\})\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_j) \tag{9}$$

όπου οι πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)$ και $\mathrm{P}(\mathcal{H}_1)$=1- $\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)$ εκφράζουν την εκ των προτέρων γνώση μας για τη συχνότητα εμφάνισης κάθε υπόθεσης και θεωρούνται γνωστές, ενώ η ποσότητα $\mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i | \mathcal{H}_j\})$ ακφράζει την πιθανότητα να αποφασίσουμε υπέρ της υπόθεσης $\mathcal{H}_i$ με δεδομένο ότι το τ.δ. ακολουθεί στην πραγματικότητα την υπόθεση $\mathcal{H}_j$.
Όπως ήδη αναφέραμε, με ένα τυχαιοποιημένο κανόνα, σε κάθε $\mathbf{x}\in\mathcal{R}^N$ αποφασίζουμε υπέρ της $\mathcal{H}_i$ με ποσοστό $\delta_i(\mathbf{x})$. Γνωρίζουμε επίσης ότι όταν το τ.δ. ακολουθεί την υπόθεση $\mathcal{H}_j$ τότε η σ.π.π. του είναι η $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_j)$ και επομένως

$$\mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i | \mathcal{H}_j\})=\int \delta_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_j)\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας τη Σχέση (10) στη Σχέση (8) και κάνοντας πράξεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta})&= \int \delta_0(\mathbf{x})\ [L_{00}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_0) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)+ L_{01}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)]\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\quad+\int \delta_1(\mathbf{x})\ [L_{10}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_0) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)+ L_{11}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)]\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= \int (\delta_0(\mathbf{x})\ c_0(\mathbf{x})+\delta_1(\mathbf{x})\ c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{11}$$

όπου

$$c_0(\mathbf{x})=L_{00}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_0) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)+ L_{01}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1) \tag{12}$$

και

$$c_1(\mathbf{x})=L_{10}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_0) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)+ L_{11}\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1). \tag{13}$$

Για τη συνάρτηση διακινδύνευσης της Σχέσης (11) ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) &= \int (\delta_0(\mathbf{x})\, c_0(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x})\, c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\geq \int \min_{i=0,1}\, c_i(\mathbf{x})(\delta_0(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int \min_{i=0,1}\, c_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Είναι προφανές ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα στη Σχέση (14) είναι ανεξάρτητο από ελεγχοσυναρτήσεις και αποτελεί ένα κάτω φράγμα της συνάρτησης διακινδύνευσης $\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta})$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κανόνας ο οποίος θα πετυχαίνει αυτό το κάτω φράγμα. Αν πράγματι υπάρχει ένας τέτοιος κανόνας τότε αυτός θα αποτελούσε τη βέλτιστη, κατά Bayes, επιλογή. Για το σκοπό αυτό ας ορίσουμε τα σύνολα:

$$\begin{aligned} &\mathbb{S}_0 = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N : c_0(\mathbf{x}) < c_1(\mathbf{x})\} \\ &\mathbb{S}_1 = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N : c_0(\mathbf{x}) > c_1(\mathbf{x})\} \\ &\mathbb{S}_{01} = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N : c_0(\mathbf{x}) = c_1(\mathbf{x})\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Τότε, από τη Σχέση (14) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) &\geq \int \min_{i=0,1}\, c_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\boldsymbol{S_0}} c_0(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\boldsymbol{S_1}} c_1(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\boldsymbol{S_{01}}} (\gamma_0 c_0(\mathbf{x}) + \gamma_1 c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int (c_0(\mathbf{x})(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_0}(\mathbf{x}) + \gamma_0(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} + \int (c_1(\mathbf{x})(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_1}(\mathbf{x}) + \gamma_1(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{16}$$

όπου οι συμπληρωματικές πιθανότητες ικανοποιούν τη σχέση $\gamma_0(\mathbf{x}) + \gamma_1(\mathbf{x}) = 1$.
Από τη Σχέση (16) είναι προφανές ότι η βέλτιστη επιλογή των ελεγχοσυναρτήσεων είναι η ακόλουθη:

$$\delta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\mathbb{S}_i}(\mathbf{x}) + \gamma_i(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}),\ i=0,\ 1. \tag{17}$$

Ο βέλτιστος κανόνας ουσιαστικά είναι κατά βάση ντετερμινιστικός αφού αποφασίζουμε με βεβαιότητα $\mathcal{H}_0$ όταν $c_0(\mathbf{x}) < c_1(\mathbf{x})$, προτιμούμε την εναλλακτική $\mathcal{H}_1$ όταν $c_0(\mathbf{x}) > c_1(\mathbf{x})$ και τέλος μόνο όταν οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες καταφεύγουμε στην ρίψη νομίσματος ε την υπόθεση $\mathcal{H}_0$ με πιθανότητα $\gamma_0(\mathbf{x})$ και την $\mathcal{H}_1$ με $\gamma_1(\mathbf{x}) = 1 - \gamma_0(\mathbf{x})$.
Τέλος αντικαθιστώντας τα $c_i(\mathbf{x})$ από τις Σχέσεις (12) και (13) καταλήγουμε στον ακόλουθο κανόνα απόφασης:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H}_1 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) > \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\,\mathrm{P}(\mathcal{H}_1)) \\ \mathcal{H}_1 & \text{με πιθανότητα } \gamma_1(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\,\mathrm{P}(\mathcal{H}_1)) \\ \mathcal{H}_0 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) < \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\,\mathrm{P}(\mathcal{H}_1)) \\ \mathcal{H}_0 & \text{με πιθανότητα } \gamma_0(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\,\mathrm{P}(\mathcal{H}_1)), \end{array} \tag{18}$$

όπου $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ ο λόγος πιθανοφάνειας,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)/\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0). \tag{19}$$

3. Ελαχιστοποίηση της Πιθανότητας Σφάλματος

Αν στον κανόνα απόφασης της Σχέσης (18), επιλέξουμε $L_{00}= L_{11}=0$ και $L_{01}= L_{10}=1$[1], τότε προκύπτει ο ακόλουθος βέλτιστος κατά Bayes κανόνας απόφασης:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{H}_1 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})>\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_1 & \text{με πιθανότητα } \gamma_1(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})= \mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_0 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})<\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_0 & \text{με πιθανότητα } \gamma_0(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})=\mathrm{P}(\mathcal{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_1).
\end{array}
\qquad (20)
$$

Είναι εύκολο να δούμε από τη Σχέση (8) ότι η παραπάνω επιλογή τιμών των παραμέτρων ζημίας οδηγεί στην ακόλουθη συνάρτηση διακινδύνευσης

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta})= \mathrm{P}(\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_1\})+ \mathrm{P}(\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_0\}), \qquad (21)$$

που εκφράζει την πιθανότητα σφάλματος, μία ποσότητα εξαιρετικά σημαντική σε πολλές εφαρμογές. Μια διαφορετική ερμηνεία του βέλτιστου κατά Bayes κανόνα απόφασης προκύπτει ως ακολούθως. Από τη Σχέση (20) και τον ορισμό της Σχέσης (19) της συνάρτησης του λόγου πιθανοφάνειας, προκύπτει ότι ο ανιχνευτής αποφασίζει $\mathcal{H}_i$ εάν η ακόλουθη ανισότητα:

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_i)/\ f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_j)>\mathrm{P}(\mathcal{H}_j)/\ \mathrm{P}(\mathcal{H}_i)$$

είναι αληθής. Παίρνοντας υπόψη μας ότι η $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_i)$ εκφράζει ουσιασικά τη δεσμευμένη π.π. δοθείσης της υπόθεσης $\mathcal{H}_i$, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes στην παραπάνω ανισότητα, παίρνουμε:

$$f(\boldsymbol{\theta}_i|\mathbf{x})>f(\boldsymbol{\theta}_j|\mathbf{x})$$

όπου $f(\boldsymbol{\theta}_i|\mathbf{x})$, $f(\boldsymbol{\theta}_j|\mathbf{x})$ είναι οι *εκ των υστέρων* (a posteriori) πιθανότητες των δύο υποθέσεων. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω, ο ανιχνευτής ελάχιστης πιθανότητας σφάλματος επιλέγει την υπόθεση με τη μεγαλύτερη εκ των υστέρων πιθανότητα. Για το λόγο αυτό ο συγκεκριμένος ανιχνευτής ονομάζεται ανιχνευτής *μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας* (maximum a posteriori probability ή MAP detector) και ελαχιστοποιεί τη συνολική πιθανότητα σφάλματος ανεξάρτητα από τις τιμές των εκ των προτέρων πιθανοτήτων εμφάνισης των υποθέσεων.

4. Έλεγχος Υποθέσεων κατά Neyman-Pearson

Στην κλασική Θεωρία Ελέγχου Υποθέσεων (ή Θεωρίας των Neyman-Pearson), η μηδενική απόφαση $\mathcal{H}_0$ και η εναλλακτική προς αυτήν $\mathcal{H}_1$ δεν είναι συμμετρικές δεν έχουν δηλαδή την ίδια βαρύτητα. Για

[1] Μια τέτοια επιλογή των L_{ij} είναι πολύ λογική αν πάρουμε υπόψη μας ότι η επιλογή $L_{00}= L_{11}=0$ ουσιαστικά σημαίνει ότι θεωρούμε ότι δεν παθαίνουμε καμία ζημία στην περίπτωση αυτή. Από την άλλη μεριά η επιλογή $L_{01}= L_{10}=1$ σημαίνει ότι θεωρούμε ότι υφιστάμεθα την ίδια ζημία με την επιλογή των αντίστοιχων αποφάσεων.

παράδειγμα στην εφαρμογή του ραντάρ η ανίχνευση εχθρικού αεροπλάνου χαρακτηρίζεται σημαντικότερη από μια λανθασμένη ανίχνευση. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε με διαφορετικό τρόπο το πρόβλημα ελέγχου από αυτόν που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

Πιθανότητα Ανίχνευσης (Detection): $P_{\mathscr{D}} = P(\{\mathscr{O}_1 | \mathscr{H}_1\})$ (22)

Πιθανότητα Λανθασμένου Συναγερμού (False Alarm): $P_{\mathscr{FA}} = P(\{\mathscr{O}_1 | \mathscr{H}_0\})$ (23)

Πιθανότητα Απώλειας (Miss): $P_{\mathscr{M}} = P(\{\mathscr{O}_0 | \mathscr{H}_1\})$, (24)

και για τις οποίες χρησιμοποιούμε ένα προφανή, αλλά ιδιαίτερο, συμβολισμό και ονομασία.
Σε ένα πρόβλημα ανίχνευσης είναι φυσικό να επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε την Πιθανότητα Ανίχνευσης και να ελαχιστοποιήσουμε την Πιθανότητα Λανθασμένου Συναγερμού επιλέγοντας κατάλληλο κανόνα απόφασης μέσω των ελεγχοσυναρτήσεων $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})=[\delta_0(\mathbf{x})\ \delta_1(\mathbf{x})]^t$. Δυστυχώς όμως (όπως είναι πολύ εύκολο να δούμε) οι δύο αυτές απαιτήσεις είναι ανταγωνιστικές και επομένως είναι αδύνατη η ταυτόχρονη ικανοποίησή τους αφού όταν αυξάνει η πρώτη πιθανότητα αυξάνει υποχρεωτικά και η δεύτερη. Με βάση το γεγονός αυτό οι Neyman και Pearson πρότειναν ο προσδιορισμός των ελεγχοσυναρτήσεων να προκύψει από την λύση του παρακάτω προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\max_\delta P_{\mathscr{D}}$$

με περιορισμό (25)

$$P_{\mathscr{FA}} \leq \alpha,$$

όπου $0 \leq \alpha \leq 1$ εκφράζει το μέγιστο αποδεκτό ποσοστό εσφαλμένων συναγερμών και αποτελεί ποσότητα που καθορίζεται από τον στατιστικό/μηχανικό. Επομένως ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε τον κανόνα που μεγιστοποιεί την πιθανότητα ανίχνευσης αλλά ταυτόχρονα εξασφαλίζει ότι οι λανθασμένοι συναγερμοί δεν ξεπερνούν ένα επίπεδο α (το α στην ορολογια της Στατιστικής Συμπερασματολογίας είναι γνωστό ως ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$).
Είναι εύκολα να δούμε ότι οι πιθανότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της Σχέσης (25) ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_{\mathscr{D}}(\delta) = P(\{\mathscr{O}_0 | \mathscr{H}_1\}) = \int \delta_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1) d\mathbf{x}$$

(26)

$$P_{\mathscr{FA}}(\delta) = P(\{\mathscr{O}_1 | \mathscr{H}_0\}) = \int \delta_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) d\mathbf{x}$$

και είναι γνωστές και ως *Σφάλματα Τύπου* Ι και *Τύπου* ΙΙ αντίστοιχα.
Χρησιμοποιώντας την τεχνική των πολλαπλασιαστών Lagrange, το υπό συνθήκη πρόβλημα βελτιστοποίησης της Σχέσης (25) μπορεί να μετατραπεί στο ακόλουθο, χωρίς περιορισμό, πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$P(\delta) = \int \delta_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1) d\mathbf{x} - \lambda \int \delta_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) d\mathbf{x}, \quad (27)$$

όπου λ μη αρνητικός αριθμός γνωστός ως πολλαπλασιαστής Lagrange.
Ορίζοντας τώρα τα σύνολα

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_0=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N\text{: } \mathcal{L}(\mathbf{x})<\lambda\}\\
&\mathcal{S}_1=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N\text{: } \mathcal{L}(\mathbf{x})> \lambda\} \qquad (28)\\
&\mathcal{S}_{01}=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N\text{: } \mathcal{L}(\mathbf{x})=\lambda\},
\end{aligned}$$

με $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ τη συνάρτηση του λόγου πιθανοφάνειας που ορίσθηκε στη Σχέση (19), μπορούμε να καταλήξουμε στον ακόλουθο βέλτιστο κανόνα απόφασης των Neyman-Pearson:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_1 && \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})>\lambda\\
&\mathcal{H}_1 \ \text{ με πιθανότητα } \gamma_1(\mathbf{x}) && \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})= \lambda\\
&\mathcal{H}_0 && \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})<\lambda\\
&\mathcal{H}_0 \ \text{ με πιθανότητα } \gamma_0(\mathbf{x}) && \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x})=\lambda \qquad (29)
\end{aligned}$$

όπου λ ο πολλαπλασιαστής Lagrange η τιμή του οποίου προσδιορίζεται ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης άλλα δεν θα παρουσιαστεί εδώ.
Στην επόμενη παράγραφοπαραθέτουμε ένα παράδειγμα για διασαφητικούς λόγους.

Παράδειγμα

Θεωρήστε ότι παρατηρούμε την πραγματοποίηση μιας τ.μ. της οποίας η σ.π.π. είναι είτε $\mathcal{N}(0,1)$ είτε $\mathcal{N}(1,1)$ και καλούμαστε να προσδιορίσουμε εάν $\mu=0$ ή $\mu=1$ βασιζόμενοι σε μία και μοναδική παρατήρηση $x=x[0]$. Οι δύο ανταγωνιζόμενες υποθέσεις σε αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$\mathcal{H}_0 : \mathrm{X}\sim \mathcal{N}(0,1) \ \text{(ή } \mu=0\text{)}$$
$$\mathcal{H}_{1v} : \mathrm{X}\sim \mathcal{N}(1,1) \ \text{(ή } \mu=1\text{).}$$

Το παραπάνω πρόβλημα από τη σκοπιά της επεξεργασίας σήματος, αποτελεί το πρόβλημα *ανίχνευσης σήματος* (signal detection problem) και επαναδιατυπώνεται ως εξής: έχουμε στη διάθεσή μας μία παρατήρηση $x[0]$ και θέλουμε προσδιορίσουμε εάν το δείγμα μας αποτελείται μόνο από θόρυβο ή από την υπέρθεση σήματος και θορύβου, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0&: \quad x[0]=w[0]\\
\mathcal{H}_1&: \quad x[0]= s[0]+w[0],
\end{aligned}$$

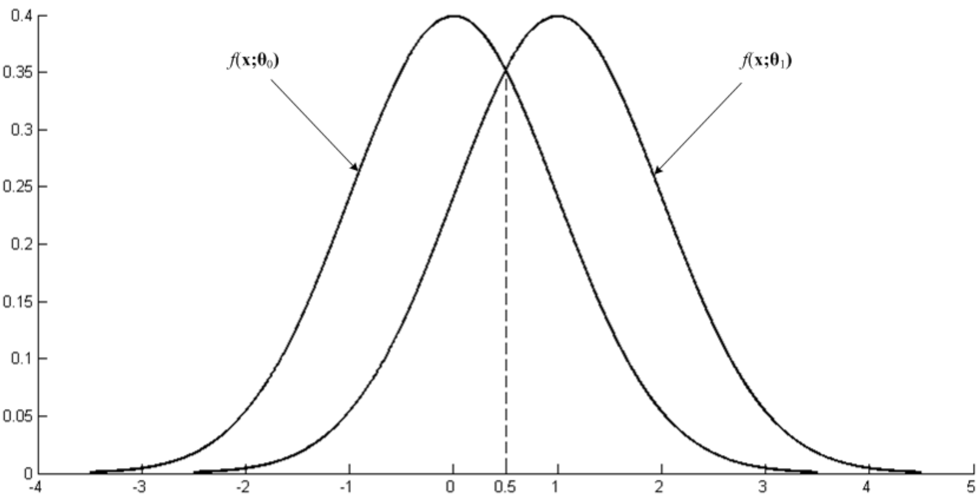
όπου $s[0]=1$ και $w[0]\sim N(0,1)$. Για τα δεδομένα του συγκεκριμένου παραδείγματος θα έχουμε επομένως:

$$f(\mathrm{x};\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0])^2\right)$$

και

$$f(\mathrm{x};\theta_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0]-1)^2\right)$$

Οι δύο αυτές συναρτήσεις έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Οι σ.π.π. της x για κάθε μία από τις υποθέσεις του παραδείγματος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι προδιαγραφές του προβλήματος απαιτούν η πιθανότητα *λανθασμένου συναγερμού* να περιορίζεται στην τιμή $P_{\mathcal{FA}} = 0.15$ (σε πραγματικές συνθήκες η τιμή αυτή θα έπρεπε να είναι βέβαια πολύ μικρότερη). Για τον υπολογισμό του ανιχνευτή που επιλύει με βέλτιστο τρόπο το συγκεκριμένο πρόβλημα, ακολουθούμε την προσέγγιση των Neyman-Pearson. Ο βέλτιστος ανιχνευτής ή κανόνας απόφασης σύμφωνα με τη Σχέση (29) θα πρέπει να αποφασίζει $\mathcal{H}_1$ (ελήφθη σήμα) όταν ισχύει:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x[0]-1\right)^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x[0]\right)^2\right)} > \lambda$$

ή

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left((x[0])^2 - 2x[0] + 1 - (x[0])^2\right)\right) > \lambda$$

ή τελικά

$$\exp\left(x[0]-\frac{1}{2}\right) > \lambda.$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι ο λογάριθμος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (και επομένως διατηρείται η φορά της ανισότητας στην παραπάνω σχέση αν λογαριθμήσουμε και τα δύο μέλη) καταλήγουμε τελικά στο ότι ο ανιχνευτής θα αποφασίζει ότι ελήφθη σήμα όταν:

$$x[0] > \ln(\lambda) + \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, ο ανιχνευτής συγκρίνει το $x[0]$ με ένα κατώφλι $T = \ln(\lambda) + 1/2$ και αποφασίζει υπέρ της απόφασης $\mathcal{H}_1$ εάν $x[0] > T$ και της $\mathcal{H}_0$ εάν $x[0] \le T$.

Ο υπολογισμός της τιμής του κατωφλίου (όπως αναφέραμε παραπάνω) θα γίνει με βάση τον περιορισμό για την τιμή της πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού,δηλαδή θα απαιτήσουμε:

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = Q(\mathrm{T}) = 0.15$$

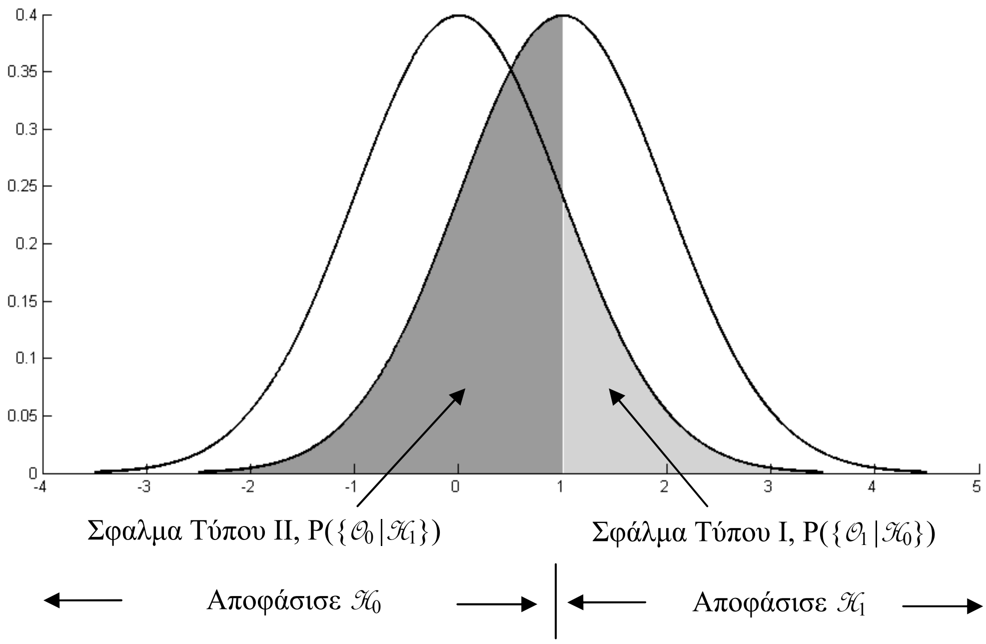
από την οποία προκύπτει η τιμή $T = 1.02$ και επομένως προκύπτει ότι η τιμή του πολλαπλασιαστή θα είναι λ=1.682.

Θα πρέπει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό, ότι η συνάρτηση $Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$ ονομάζεται *συμπληρωματική αθροιστική συνάρτηση κατανομής* (complementary cumulative distribution function) και δίνει την πιθανότητα P(X>x), όταν $X \sim N(0,1)$. Στη γενική περίπτωση, εάν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε P(X>x) = $Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και αφήνεται ως άσκηση).

Η $Q(x)$ δεν μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή, ωστόσο για υπολογιστικούς σκοπούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω προσέγγισή της:

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Στο Σχήμα 3 φαίνονται οι περιοχές απόφασης και οι πιθανότητες σφάλματος για τον κανόνα απόφασης του παραδείγματος.



Σχήμα 3. Περιοχές απόφασης και πιθανότητες σφάλματος.

Ερώτημα 1:

1.α: Ποιός είναι ο ανιχνευτής των Neyman-Pearson που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα ανίχνευσης, στην περίπτωση που θεωρηθεί ότι το σφάλμα με τις σοβαρότερες επιπτώσεις είναι η απώλεια του σήματος (signal miss) και απαιτηθεί η πιθανότητα να συμβεί ένα τέτοιο σφάλμα να περιορίζεται στην τιμή 10^{-3}; Ποια είναι η νέα τιμή κατωφλίου και ποιες είναι οι πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού και ορθής ανίχνευσης για το νέο ανιχνευτή;

1.β: Επιλύστε το ίδιο πρόβλημα για την περίπτωση που έχουμε στη διάθεσή μας όχι μία, αλλά $N > 1$ (στατιστικά ανεξάρτητες) παρατηρήσεις, $\mathbf{x}=[x[0]\ x[1]\ldots x[N-1]]^t$.

Ερώτημα 2:

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αλλάζουμε το προς ανίχνευση σήμα του προβλήματος από $s[n]=1$ σε $s[n]=A$, $A\in\Re$ (οι ιδιότητες του θορύβου παραμένουν ίδιες). Ποιές είναι οι δύο ανταγωνιζόμενες υποθέσεις του νέου προβλήματος ανίχνευσης; Ακολουθώντας την προσέγγιση των Neyman-Pearson, εάν απαιτήσουμε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού να είναι $P_{FA}=10^{-5}$, ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του A έτσι ώστε η πιθανότητα ορθής ανίχνευσης να είναι τουλάχιστον 0.8;

Ερώτημα 3:

Έστω ένα στοιχειώδες ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, ένα ιδανικό κανάλι προσθετικού λευκού θορύβου Gauss (Additive White Gaussian Noise ή AWGN) και έναν δέκτη. Ο πομπός λαμβάνει στην είσοδο μια δυαδική ακολουθία b_n, όπου $b_n=0$ ή 1, $n=0,1,\ldots$ και εκπέμπει στο κανάλι μια ακολουθία τετραγωνικών παλμών, με κάθε παλμό να έχει διάρκεια T_B δευτερόλεπτα και πλάτος $-A$, εάν το εκπεμπόμενο ψηφίο είναι 0 και A, εάν το ψηφίο είναι 1. Το σήμα αυτό φτάνει στο δέκτη αφού προστεθεί λευκός θόρυβος με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 κατά τη διέλευσή του μέσω του καναλιού. Ο δέκτης με τη σειρά του λαμβάνει ένα δείγμα από την είσοδό του κάθε T_B δευτερόλεπτα (θεωρούμε ότι ο πομπός και ο δέκτης είναι τέλεια συγχρονισμένοι) και ανάλογα με την τιμή του δείγματος αποφασίζει εάν το ψηφίο που έχει σταλεί από τον πομπό είναι 0 ή 1.

3.α: Εκφράστε το πρόβλημα της απόφασης στο δέκτη σαν ένα πρόβλημα ελέγχου δυαδικών υποθέσεων. Ποια είναι τα δύο είδη σφαλμάτων που μπορούν να προκύψουν σε αυτό το πρόβλημα;

3.β: Υποθέστε ότι μας δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι στην ακολουθία εισόδου του συστήματος, το πλήθος των 1 είναι κατά μέσο όρο δύο φορές μεγαλύτερο από το πλήθος των 0. Προτείνετε έναν τρόπο απόφασης που να ελαχιστοποιεί τη συνολική πιθανότητα σφάλματος. Ποια είναι η τιμή αυτής της πιθανότητας;

3.γ: Εξομοιώστε το παραπάνω τηλεπικοινωνιακό σύστημα στη Matlab. Επιλέξτε μια τιμή για το A και, για τουλάχιστον 10 διαφορετικά επίπεδα ισχύος θορύβου μετρήστε πειραματικά[2] τα σφάλματα απόφασης στο δέκτη και συγκρίνεται τις πειραματικές μετρήσεις με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή της πιθανότητας σφάλματος. Εξηγήστε αναλυτικά τη μεθοδολογία που ακολουθήσατε. Σχεδιάστε γραφικές παραστάσεις με τα αποτελέσματά σας.

Βιβλιογραφία

[1] S. Haykin, “Συστήματα Επικοινωνίας,” *Εκδόσεις Παπασωτηρίου*, Αθήνα, 1995.

[2] S. M. Kay, “Fundamentals of Statistical Signal Proccessing Vol. II, Detection Theory,” *Prentice Hall* Inc., 1998.

---

[2] Για να λάβετε αξιόπιστες μετρήσεις, η ακολουθία εισόδου του συστήματος θα πρέπει να έχει σχετικά μεγάλο μήκος (για παράδειγμα στην τάξη του 10^5).