

Επίδειξη της Αναδίπλωσης Συχνοτήτων

A. Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε, όταν ένα αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με μια συγκεκριμένη συχνότητα δειγματοληψίας f_s , το συχνοτικό του περιεχόμενο είναι πολύ πιθανό να αλλοιωθεί λόγω του φαινομένου της αναδίπλωσης συχνοτήτων. Η αναδίπλωση συχνοτήτων γίνεται με βάση τους ακόλουθους 2 κανόνες:

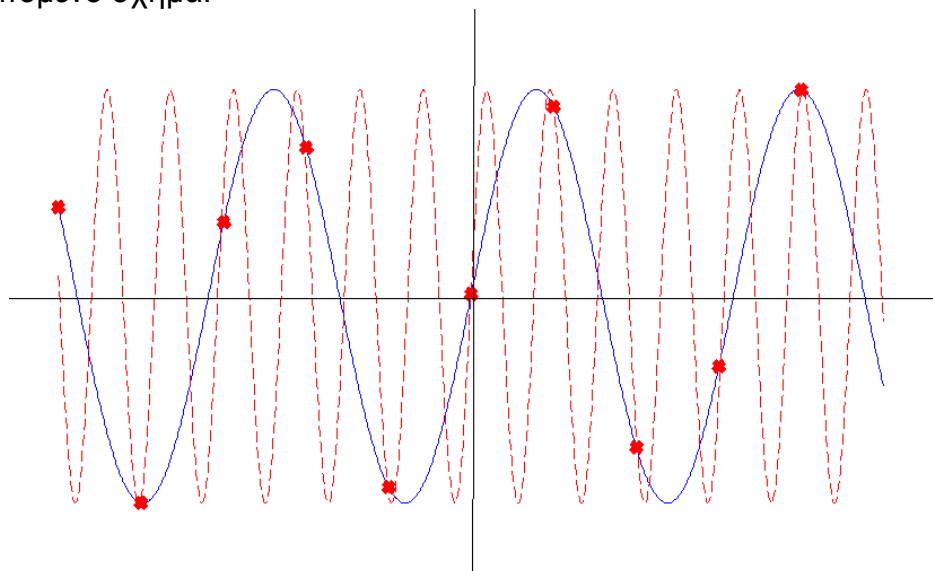
- Συχνότητες οι οποίες στο αρχικό σήμα είναι μεγαλύτερες από τη συχνότητα δειγματοληψίας χάνουν ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας και εμφανίζονται στο διάστημα $[0, f_s)$. Αν για παράδειγμα μια συχνότητα f_a στο αρχικό σήμα είναι ίση με

$$f_a = k * f_s + f_a'$$

τότε αυτή θα αναδιπλωθεί στη συχνότητα f_a' η οποία ανήκει στο διάστημα $[0, f_s)$ και έχει χάσει k ακέραια πολλαπλάσια.

- Επιπρόσθετα, αν η συχνότητα f_a' ανήκει στο διάστημα $(f_s/2, f_s)$ τότε αυτή υφίσταται επιπλέον αναδίπλωση και μάλιστα αντικατοπτρίζεται στη συμμετρική της ως προς $f_s/2$ συχνότητα.

Για να δούμε εποπτικά γιατί κάτι τέτοιο συμβαίνει, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου δειγματοληπτούμε ένα ημιτονικό σήμα όπως παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα:



Εικόνα 4: Από όλα τα σημεία δειγματοληψίας περνάει και δεύτερο ημίτονο

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε πως από όλα τα σημεία δειγματοληψίας περνάει και κάποιο άλλο ημιτονικό σήμα (διακεκομμένη γραμμή). Επομένως, αν έχουμε στη διάθεσή μας μόνο τα δείγματα του

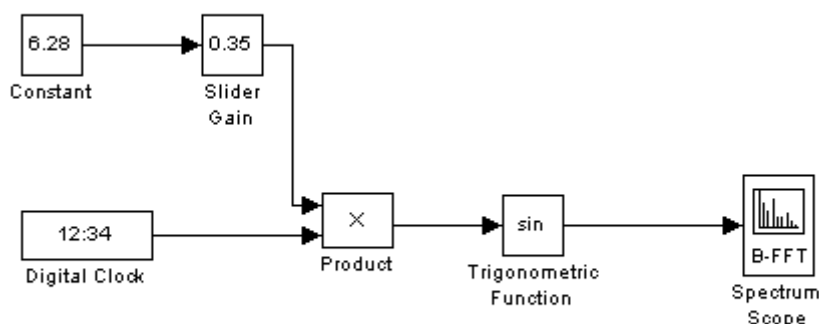
σήματος είναι αδύνατο να πούμε με βεβαιότητα ποιο από τα δυο ημίτονα δειγματοληπτήθηκε.

Β. Αναδίπλωση συχνότητας ημιτονικού σήματος

Ας υποθέσουμε πως δειγματοληπτούμε ένα ημιτονικό σήμα συχνότητας f_k με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=1$ Hz. Με βάση τους κανόνες για την αναδίπλωση συχνότητας που προαναφέραμε συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα και εξηγήστε σε κάθε περίπτωση πως ακριβώς εφαρμόζονται οι κανόνες αυτοί:

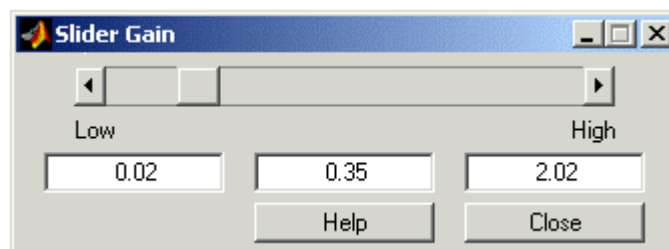
f_k	Αναδιπλωμένη συχνότητα	Τι ακριβώς συμβαίνει;
0.2		
0.4		
0.7		
1.1		
2.1		
2.6		

Για να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματά σας, φορτώστε το μοντέλο alias.mdl το οποίο έχετε κατεβάσει. Δίνοντας από το command line του Matlab την εντολή alias θα φορτωθεί το μοντέλο του ακόλουθου σχήματος:



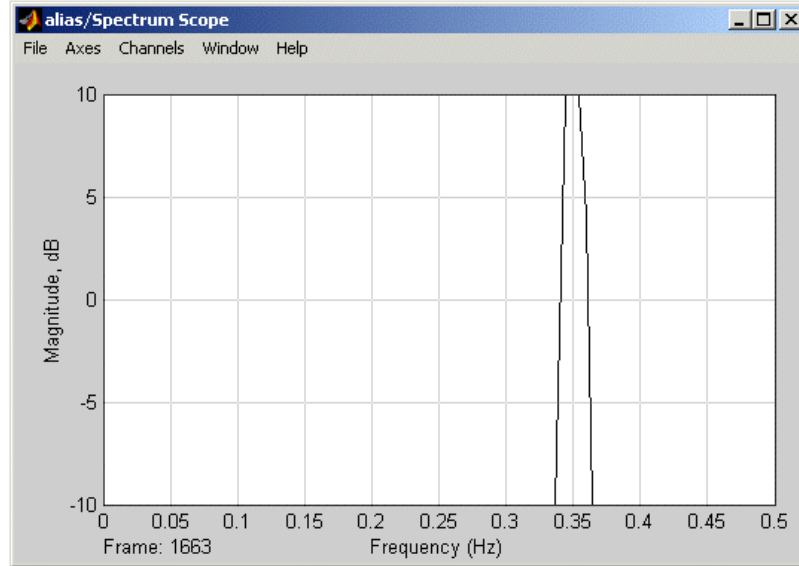
Εικόνα 5: Μοντέλο επίδειξης της αναδίπλωσης συχνότητας

Κάνοντας διπλό κλικ στο block “Slider Gain” θα εμφανιστεί το ακόλουθο πλαίσιο διαλόγου:



Εικόνα 6: Πλαίσιο διαλόγου για την επιλογή της συχνότητας του ημιτόνου

Το μοντέλο έχει ρυθμιστεί έτσι ώστε να εξομοιώνεται για άπειρο χρόνο. Κατά τη διάρκεια που εξομοιώνεται μπορούμε να μετακινούμε το slider του παραπάνω πλαισίου διαλόγου και να μεταβάλουμε έτσι τη συχνότητα του ημιτονικού σήματος. Αν τρέξουμε το μοντέλο, τότε θα εμφανιστεί ένα νέο παράθυρο το οποίο θα εμφανίζει το συχνοτικό περιεχόμενο του δειγματοληπτημένου σήματος:

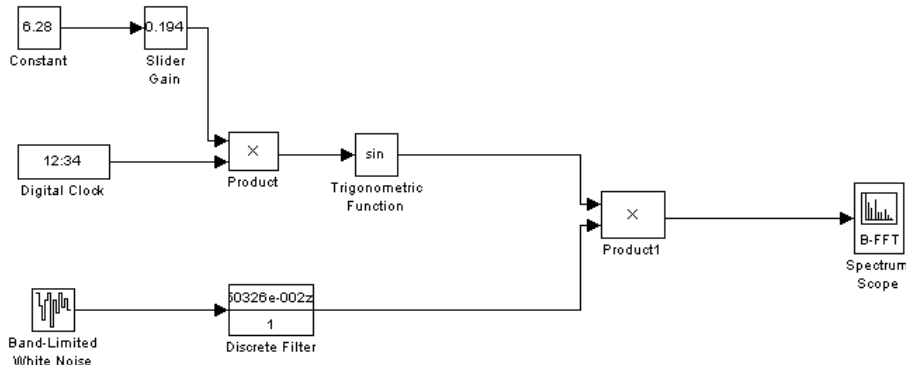


Εικόνα 7: Συχνοτικό περιεχόμενο του δειγματοληπτημένου σήματος

- Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας με χρήση του παραπάνω μοντέλου.

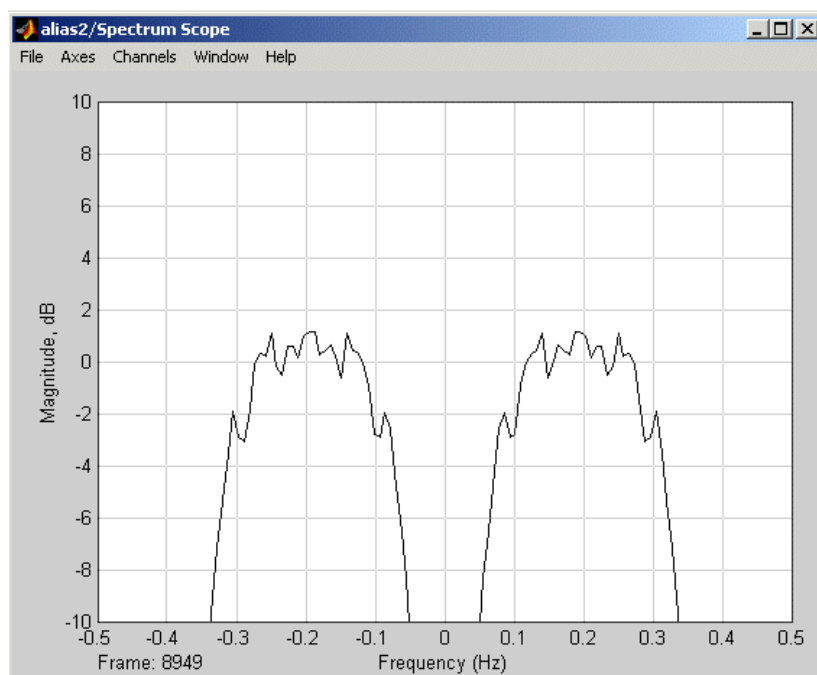
Γ. Αναδίπλωση σήματος με πεπερασμένο εύρος ζώνης

Είναι γνωστό πως ο λευκός θόρυβος έχει συχνοτικό περιεχόμενο το οποίο έχει ίση ενέργεια παντού και εκτείνεται σε όλο το εύρος συχνοτήτων. Για να δημιουργήσουμε ένα σήμα με πεπερασμένο εύρος ζώνης, μπορούμε να φιλτράρουμε μια ακολουθία λευκού θορύβου από ένα κατωπερατό φίλτρο. Αν στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε το φιλτραρισμένο σήμα με ένα ημίτονο, τότε από την ιδιότητα της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει ότι δημιουργούμε ένα σήμα με πεπερασμένο εύρος ζώνης. Φορτώστε το αρχείο `alias2.mdl` που έχετε κατεβάσει δίνοντας την εντολή `alias2` στο command line του Matlab. Θα εμφανιστεί τότε το μοντέλο του παρακάτω σχήματος:



Εικόνα 8: Μοντέλο επίδειξης της αναδίπλωσης συχνότητας για ένα σήμα πεπερασμένου εύρους ζώνης

Με διπλό κλικ στο block “Slider Gain” εμφανίζεται, όμοια με πριν ένα πλαίσιο διαλόγου από το οποίο μπορούμε να μεταβάλουμε τη συχνότητα διαμόρφωσης. Αν τρέξετε το μοντέλο, θα εμφανιστεί ένα νέο παράθυρο το οποίο εμφανίζει το συχνοτικό περιεχόμενο του διαμορφωμένου σήματος:



Εικόνα 9: Συχνοτικό περιεχόμενο του διαμορφωμένου σήματος

- Τι παρατηρείται καθώς η συχνότητα διαμόρφωσης πλησιάζει την τιμή 0; Γιατί συμβαίνει αυτό;
- Τι συμβαίνει όταν μέρος μόνο του σήματος υφίσταται αναδίπλωση συχνοτήτων; Μπορούμε στην περίπτωση αυτή να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα;