Ασκήσεις Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων

Α. Μετατροπή A/D, D/A και δειγματοληψία

Άσκηση 1

Θεωρούμε την ακολουθία διακριτού χρόνου

$$x(n) = \cos(\frac{n\pi}{8})$$

Να βρεθούν δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία θα μπορούσαν να παράγουν την ακολουθία αυτή όταν υποστούν δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = 10Hz$.

Λύση

Ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου

$$x_\alpha(t) = \cos(\Omega_0 t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

που υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα δειγματοληψίας f_s καταλήγει στην ακολουθία διακριτού χρόνου

$$x(n) = x_\alpha(nT_s) = \cos(2\pi\frac{f_0}{f_s}n)$$

Παρατηρούμε όμως, ότι για οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό k,

$$\cos(2\pi\frac{f_0}{f_s}n) = \cos(2\pi\frac{f_0 + kf_s}{f_s}n)$$

Επομένως, οποιοδήποτε ημιτονοειδές σήμα με συχνότητα

$$f = f_0 + kf_s$$

θα παράγει την ίδια ακολουθία όταν θα υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα δειγματοληψίας f_s. Με δεδομένο ότι $x(n) = \cos(n\pi/8)$, θέλουμε

$$2\pi\frac{f_0}{f_s} = \frac{\pi}{8}$$

ή

$$f_0 = \frac{1}{16} f_s = 625Hz$$

Συνεπώς, δύο σήματα που μπορούν να παράγουν τη δεδομένη ακολουθία είναι το

$$x_1(t) = \cos(1250\pi t)$$

και το

$$x_2 = \cos(21250\pi t)$$

■

Άσκηση 2

Αν ο ρυθμός Nyquist για το $x_\alpha(t)$ είναι Ω_s, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα που προκύπτουν από το $x_\alpha(t)$.

(α) $\frac{dx_\alpha(t)}{dt}$

(β) $x_\alpha(2t)$

(γ) $x_\alpha^2(t)$

(δ) $x_\alpha(t) cos(\Omega_0 t)$

Λύση

(α) Ο ρυθμός (συχνότητα) Nyquist είναι ίσος με το διπλάσιο της ανώτερης συχνότητας του σήματος $x_\alpha(t)$. Αν είναι

$$y_a(t) = \frac{dx_\alpha(t)}{dt}$$

τότε

$$Y_\alpha(j\Omega) = j\Omega X_\alpha(j\Omega)$$

Συνεπώς, αν είναι $X_\alpha(j\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \Omega_0$, το ίδιο θα ισχύει και για την $Y_\alpha(j\Omega)$. Άρα, η συχνότητα Nyquist δε μεταβάλλεται με την παραγώγιση.

(β) Το σήμα $y_\alpha(t) = x_\alpha(2t)$ σχηματίζεται από το $x_\alpha(t)$ με συμπίεση του άξονα του χρόνου κατά ένα συντελεστή 2. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επέκταση του άξονα των συχνοτήτων κατά ένα συντελεστή 2. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} Y_\alpha(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_\alpha(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_\alpha(2t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x_\alpha(\tau) e^{-j\Omega\tau/2} dt \\ &= \frac{1}{2} X_\alpha(\frac{j\Omega}{2}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν η συχνότητα Nyquist για το $x_\alpha(t)$ είναι Ω_s, η συχνότητα Nyquist για το $y_\alpha(t)$ θα είναι $2\Omega_s$.

(γ) Όταν δύο σήματα πολλαπλασιάζονται, οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων αυτών συνδέονται με τη πράξη της συνέλιξης. Επομένως, αν

$$y_\alpha(t) = x_\alpha^2(t)$$

τότε

$$Y_\alpha(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_\alpha(j\Omega) * X_\alpha(j\Omega)$$

Άρα, η ανώτερη συχνότητα του σήματος $y_\alpha(t)$ θα είναι η διπλάσια αυτής του $x_\alpha(t)$, και η συχνότητα Nyquist θα είναι $2\Omega_s$.

(δ) Διαμορφώνοντας ένα σήμα με τον όρο $\cos(\Omega_0 t)$, μετατοπίζεται το φάσμα του $x_\alpha(t)$ προς τα πάνω και κάτω, κατά Ω_0. Συνεπώς, η συχνότητα Nyquist του $y_\alpha(t) = cos(\Omega_0 t) x_\alpha(t)$ θα είναι $\Omega_s + 2\Omega_0$.

■

Άσκηση 3

Έστω $h_\alpha(t)$ η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού φίλτρου συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H_\alpha(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + b^2}$$

Επομένως, η $H_\alpha(s)$ έχει ένα μηδενικό στη θέση $s = -\alpha$ και ένα ζεύγος πόλων στις θέσεις $s = -\alpha \pm jb$. Επιβάλλοντας σε δειγματοληψία την $h_\alpha(t)$ σχηματίζεται ένα φίλτρο διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(n) = h_\alpha(nT_s)$$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του φίλτρου διακριτού χρόνου. (Σχεδιασμός Ψηφιακών IIR φίτλρων, βλ. Μέθοδο Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης, σελ 143 του βιβλίου)

Λύση

Για να βρεθεί η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$, είναι απαραίτητο να βρεθεί πρώτα η κρουστική απόκριση του αναλογικού φίλτρου $h_\alpha(t)$, να γίνει δειγματοληψία στη κρουστική απόκριση

$$h(n) = h_\alpha(nT_s)$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega}$$

Για να βρούμε την κρουστική απόκριση, πρώτα αναλύουμε σε μερικά κλάσματα την $H_\alpha(S)$ ως εξής:

$$H_\alpha(s) = \frac{A}{s + (\alpha + jb)} + \frac{B}{s + (\alpha - jb)}$$

Η σταθερά A είναι

$$A = [(s+\alpha+jb)H_\alpha(s)]_{s=-\alpha-jb} = \frac{s+\alpha}{s+(\alpha-jb)}|_{s=-\alpha-jb} = \frac{1}{2}$$

Παρόμοια έχουμε για το B,

$$B = [(s+\alpha-jb)H_\alpha(s)]_{s=-\alpha+jb} = \frac{s+\alpha}{s+(\alpha+jb)}|_{s=-\alpha+jb} = \frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$H_\alpha(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+(\alpha+jb)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+(\alpha-jb)} \tag{1.1}$$

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τις σταθερές A και B θα ήταν να γράψουμε την τελευταία εξίσωση με ένα κοινό παρανομαστή,

$$H_\alpha(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+b^2} = \frac{A(s+\alpha-jb)+B(s+\alpha+jb)}{(s+\alpha)^2+b^2}$$

και να εξισώσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων των αριθμητών της $H_\alpha(s)$:

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ A(\alpha-jb)+B(\alpha+jb) &= \alpha \end{aligned}$$

Λύνοντας τις δύο αυτές εξισώσεις ως προς A και B καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το προηγούμενο. Από την ανάλυση μερικών κλασμάτων της $H_\alpha(s)$, η κρουστική απόκριση μπορεί να βρεθεί και με τη χρήση του ζεύγους μετασχηματισμού Laplace

$$e^{-\alpha t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

Ειδικότερα έχουμε

$$h_\alpha(t) = \frac{1}{2}e^{(-\alpha-jb)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{(-a+jb)t}u(t) = e^{-\alpha t}\cos(bt)u(t)$$

Με δειγματοληψία της $h_\alpha(t)$,έχουμε

$$h(n) = h_\alpha(nT_s) = e^{-\alpha n T_s}\cos(bnT_s)u(nT_s)$$

Τέλος, για την απόκριση συχνότητας έχουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T_s}\cos(bnT_s)e^{jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{(-\alpha-jb)nT_s}e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{(-\alpha+jb)nTs}e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-\alpha T_s})^n e^{-jn(\omega+bT_s)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-\alpha T_s})^n e^{-jn(\omega-bT_s)} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για να συγκλίνουν τα αθροίσματα αυτά και για να ορίζεται η απόκριση συχνότητας, πρέπει να ισχύει

$$|e^{-\alpha Ts}| < 1$$

ή, επειδή είναι $T_s > 0$ πρέπει να είναι $\alpha > 0$. Με άλλα λόγια, οι πόλοι της $H_\alpha(s)$ πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή, ισοδύναμα, η $h_\alpha(t)$ πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα ευσταθές φίλτρο. Με $\alpha > 0$ έχουμε αθροίσματα απείρων όρων Γεωμετρικής Προόδου με $\lambda < 1$, οπότε παίρνουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{(-\alpha-jb)T_s}e^{j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{(-\alpha+jb)T_s}e^{j\omega}}$$

Κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και απλοποιώντας, έχουμε τελικά

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-\alpha T_s}\cos(bT_s)e^{j\omega}}{1 - 2e^{\alpha T_s}\cos(bT_s)e^{-j\omega} + e^{-2\alpha Ts}e^{-j2\omega}}$$

∎

Άσκηση 4

Ένα φίλτρο συνεχούς χρόνου έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H_\alpha(s) = \frac{1}{s+1}$$

Αν η $h_\alpha(t)$ υποστεί δειγματοληψία ώστε να σχηματιστεί ένα σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(n) = h_\alpha(nT_s)$$

να βρεθεί η τιμή του T_s, έτσι ώστε η $H(e^{j\omega})$ να είναι μικρότερη κατά 6 dB στη συχνότητα ω=π/2, σε σχέση με τη μέγιστή της τιμή για ω=0, δηλαδή,

$$10\log_{10}\frac{|H(e^{j\pi/2})|^2}{|H(e^{j0})|^2} = -6$$

Λύση

Η κρουστική απόκριση του συστήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$h_\alpha(t) = e^{-t}u(t)$$

Χρησιμοποιώντας Μετασχηματισμό Laplace (δες προηγούμενη άσκηση), όταν πραγματοποιείται δειγματοληψία, με περίοδο δειγματοληψίας T_s, η διακριτή κρουστική απόκριση που προκύπτει είναι

$$h(n) = h_\alpha(nT_s) = e^{-nT_s}u(nT_s)$$

και η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT_s}e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(T_s+j\omega)n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-(T_s+j\omega)}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-T_s}e^{-j\omega}}$$

Με

$$|H(e^{j0})|^2 = \frac{1}{(1 - e^{-T_s})^2}$$

και

$$|H(e^{j\pi/2})|^2 = \frac{1}{1+e^{-2T_s}}$$

Άρα θέλουμε

$$10log_{10}\frac{|H(e^{j\pi/2})|^2}{|H(e^{j0})|^2} = 10log_{10}\frac{(1-e^{-T_s})^2}{1+e^{-2T_s}} = -6$$

ή

$$\frac{(1-e^{-T_s})^2}{1+e^{-2T_s}} = 10^{-0.6} = 0.2512$$

Επομένως, έχουμε

$$1 - 2e^{-T_s} + e^{-2T_s} = 0.2512[1+e^{-2T_s}]$$

ή

$$0.7488e^{-2T_s} - 2e^{-T_s} + 0.7488 = 0$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς e^{-T_s}. Λύνοντας την εξίσωση αυτή, βρίσκουμε τις ρίζες

$$e^{-T_s} = \frac{1}{2(0.7488)}[2 \pm \sqrt{4-4(0.7488)^2}] = \frac{1}{0.7488}[1 \pm 0.6628] = 2.2206 \ \ ή \ \ 0.4503$$

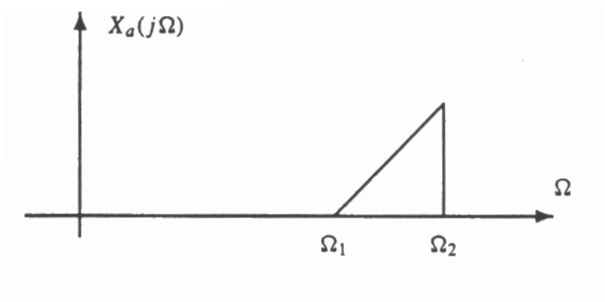
Λαμβάνοντας το φυσικό (Νεπέριο) λογάριθμο και επιλέγοντας τη (μοναδική) θετική τιμή για το T_s, έχουμε

$$T_s = 0.7978$$

■

Άσκηση 5

Ένα μιγαδικό, περιορισμένου εύρους ζώνης, αναλογικό σήμα $x_\alpha(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier ο οποίος είναι διάφορος του μηδενός για μια περιοχή συχνοτήτων $[\Omega_1, \Omega_2]$, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.



Το σήμα αυτό υφίσταται δειγματοληψία και προκύπτει η ακολουθία $x(n) = x_\alpha(nT_s)$.

(α) Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, έτσι ώστε να μπορεί να ανακτηθεί το $x_\alpha(t)$ απο τα δείγματα του $x(n)$;

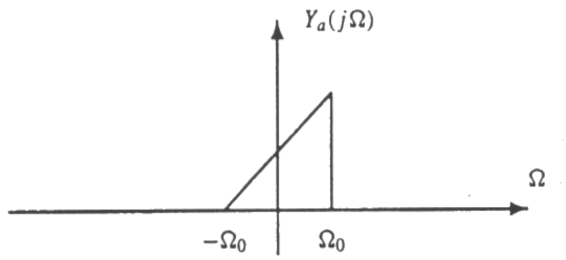
(β) Για την ελάχιστη αυτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας, να βρεθεί ο τύπος της παρεμβολής του $x_\alpha(t)$ συναρτήσει της $x(n)$.

Λύση

(α) Επειδή η μέγιστη συχνότητα του σήματος $x_\alpha(t)$ είναι η Ω_2, ο ρυθμός Nyquist είναι $2\Omega_2$. Παρατηρούμε όμως ότι αν το $x_\alpha(t)$ διαμορφωθεί από ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με συχνότητα $(\Omega_2 + \Omega_1)/2$, δηλαδή

$$y_\alpha(t) = x_\alpha(t)e^{-j(\Omega_2+\Omega_1)t/2}$$

τότε το $y_\alpha(t)$ είναι το μιγαδικό σήμα του οποίου το φάσμα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



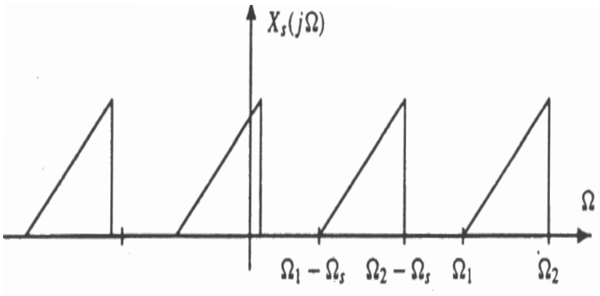
όπου $\Omega_0 = (\Omega_2 - \Omega_1)/2$. Άρα ο ρυθμός Nyquist για το $y_\alpha(t)$ είναι $2\Omega_0 = \Omega_2 - \Omega_1$, πράγμα που φανερώνει ότι το $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί με μοναδικό τρόπο από τα δείγματα του $x_\alpha(nT_s)$ με τη προϋπόθεση ότι

$$T_s \leq \frac{2\pi}{\Omega_2 - \Omega_1}$$

Αν το $x_\alpha(t)$ υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα Ω_s, το φάσμα του σήματος που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha(j\Omega - jk\Omega_s)$$

το οποίο παριστάνεται και γραφικά στο επόμενο σχήμα.



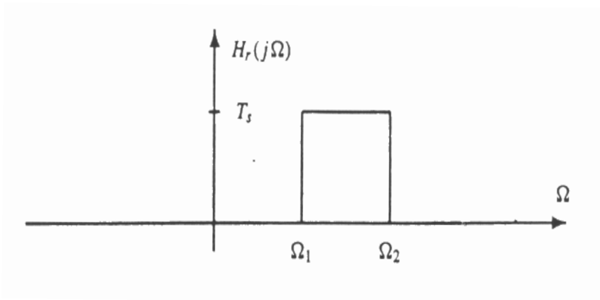
Για να μην υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των μετατοπισμένων φασμάτων, είναι απαραίτητο να ισχύει

$$\Omega_2 - \Omega_s \leq \Omega_1$$

ή

$$\Omega_s \geq \Omega_2 - \Omega_1$$

Αν αυτή η προυπόθεση ικανοποιείται, το $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί με μοναδικό τρόπο από το $x_s(t)$ χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο με απόκριση συχνότητας αυτή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(β) Με συχνότητα δειγματοληψίας $\Omega_s = \Omega_2 - \Omega_1$, το φίλτρο ανακατασκευής είναι ένα (μιγαδικό) ζωνοπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h_r(t) = T_s \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\pi t} e^{-j(\Omega_2+\Omega_1)t/2}$$

Επομένως, η έξοδος του φίλτρου ανακατασκευής, που παράγει το μιγαδικό ζωνοπερατό σήμα $x_\alpha(t)$ είναι

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h_r(t - nT_s) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{sin\Omega_s(t-nT_s)/2}{\pi(t-nT_s)} e^{-j(\Omega_2+\Omega_1)t/2}$$

■

Άσκηση 6

Δεδομένου ενός πραγματικού περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος $x_\alpha(t)$ με $X_\alpha(f) = 0$ για $|f| < f_1$ και $|f| > f_2$, το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist αναφέρει ότι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 2f_2$. Εντούτοις, σε μερικές περιπτώσεις το σήμα μπορεί να υποστεί δειγματοληψία και σε χαμηλότερη συχνότητα.

(α) Έστω ότι $f_1 = 8$KHz και $f_2 = 10$KHz. Να γίνει μια γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου της $x(n) = x_\alpha(nT_s)$ αν είναι $f_s = 1/T_s = 4$KHz.

(β) Το εύρος ζώνης του περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος ορίζεται ότι είναι:

$$B = f_2 - f_1$$

και η κεντρική συχνότητα είναι:

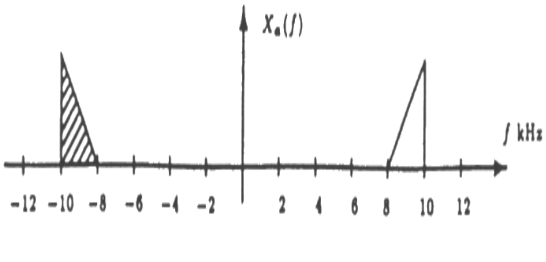
$$f_c = \frac{f_2 + f_1}{2}$$

Να δειχθεί ότι, αν είναι $f_c > B/2$ και η τιμή της συχνότητας f_2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους ζώνης B και το $x_\alpha(t)$ υποστεί δειγματοληψία στη συχνότητα $f_s = 2B$, δε θα παρουσιαστεί επικάλυψη.

(γ) Να επαναληφθεί η διαδικασία του ερωτήματος (β), για την περίπτωση που η τιμή της συχνότητας f_2 δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους ζώνης B.

Λύση

(α) Έστω ότι το σήμα $x_\alpha(t)$ έχει ένα φάσμα σαν αυτό που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



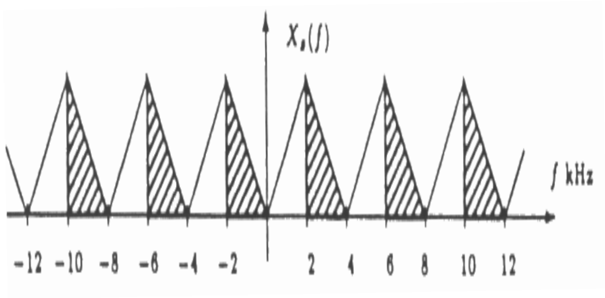
Το φάσμα του σήματος που προκύπτει μετά από τη δειγματοληψία

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

είναι

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha(f - kf_s)$$

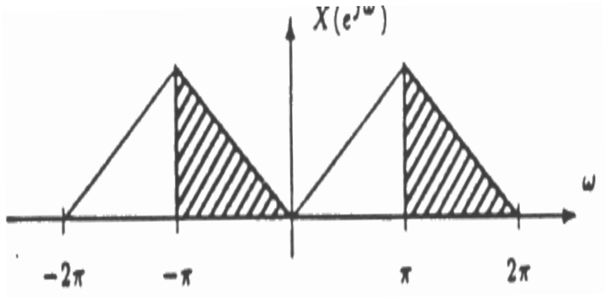
το οποίο προκύπτει από την υπέρθεση των μετατοπίσεων της $X_\alpha(f)$ κατά ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας. Με $f_s = 4KHz$, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα φάσματος



από το οποίο παρατηρούμε ότι πράγματι οι μετατοπίσεις $X_\alpha(f - kf_s)$ της $X_\alpha(f)$ δεν επικαλύπτονται. Συνεπώς, με τη κατάλληλη επεξεργασία του $x_s(t)$, το σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματα του. Τέλος, ο DTFT της ακολουθίας διακριτού χρόνου $x(n) = x_\alpha(nT_s)$ είναι

$$X(e^{j\Omega}) = X_s(\frac{j\omega}{T_s})$$

το οποίο παριστάνεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα.



(β) Αν η τιμή της συχνότητας f_2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους ζώνης B, μπορούμε να εκφράσουμε τις f_1 και f_2 ως εξής:

$$f_1 = (l-1)B \qquad f_2 = lB$$

Με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2B$, το φάσμα του σήματος μετά τη δειγματοληψία εκφράζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha(f - 2kB)$$

Επειδή η $X_\alpha(f)$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο για $(l-1)B < |f| < lB$, υπάρχει ένας όρος στο άθροισμα που συνεισφέρει στο φάσμα $X_s(f)$,στην περιοχή $0 < f < B$ και ένας όρος που συνεισφέρει στην περιοχή $-B < f < 0$ (για να φανεί ξεκάθαρα αυτό, κάντε μια γραφική παράσταση όπως στο ερώτημα (α)). Συνεπώς, δεν υπάρχει επικάλυψη και το $x_\alpha(t)$ μπορεί να δειγματοληπτηθεί χωρίς πρόβλημα, με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2B$.

(γ) Αν η τιμή της συχνότητας f_2 δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους ζώνης B, μπορούμε πάντα να αυξήσουμε το εύρος B, μέχρι να πάρουμε ένα ακέραιο πολλαπλάσιο. Ειδικότερα, έστω ότι

$$k = \left\lfloor \frac{f_2}{B} \right\rfloor$$

όπου $\lfloor x \rfloor = floor(x)$. Αν ορίσουμε

$$B' = \frac{f_2}{k}$$

επιστρέφουμε στην περίπτωση του ερωτήματος (β) όπου η τιμή της συχνότητας f_2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους ζώνης. Άρα, μπορούμε να κάνουμε δειγματοληψία στο σήμα $x_\alpha(t)$ χωρίς να προκύψει επικάλυψη, με συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s = 2B' = \frac{2f_2}{\lfloor f_2/B \rfloor}$$

∎

Άσκηση 7

Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για κάθε ένα από τα παρακάτω ζωνοπερατά σήματα:

(α) Το $x_\alpha(t)$ είναι πραγματικό με $X_\alpha(f)$ μη μηδενικό μόνο για $9KHz < |f| < 12KHz$.

(β) Το $x_\alpha(t)$ είναι πραγματικό με $X_\alpha(f)$ μη μηδενικό μόνο για $18KHz < |f| < 22KHz$.

(γ) Το $x_\alpha(t)$ είναι μιγαδικό με $X_\alpha(f)$ μη μηδενικό μόνο για $30KHz < f < 35KHz$.

Λύση

(α) Για το σήμα αυτό, το εύρος ζώνης είναι $B = f_2 - f_1 = 3KHz$ και η $f_2 = 12KHz = 4B$, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του B. Συνεπώς, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 2B = 6KHz$.

(β) Για το σήμα αυτό είναι B=4KHz και $f_2 = 22KHz$, τιμή η οποία δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του B. Με $\lfloor f_2/B \rfloor = 5$, αν θέσουμε $B' = f_2/5 = 4.4$ τότε η τιμή της f_2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εύρους B, όποτε μπορούμε να κάνουμε δειγματοληψία του σήματος $x_\alpha(t)$ με συχνότητα $f_s = 2B' = 8.8KHz$.

(γ) Για ένα μιγαδικό ζωνοπερατό σήμα με φάσμα διάφορο του μηδενός για $f_1 < f < f_2$, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = f_2 - f_1$ (δες προηγούμενη σχετική άσκηση). Άρα, για το σήμα αυτό είναι $f_s = 5KHz$.

■

Β. Επεξεργασία Αναλογικών Σημάτων στο Διακριτό Χρόνο

Άσκηση 8

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_\alpha(t)$ πρόκειται να περάσει μέσα από ένα φίλτρο με σκοπό να απομακρυνθούν από αυτό, συνιστώσες συχνότητας στην περιοχή 5 KHz$\leq f \leq 10$ KHz. Η μέγιστη συχνότητα που εμφανίζεται στο σήμα $x_a(t)$ είναι 20 KHz. Η διαδικασία του φιλτραρίσματος πρόκειται να πραγματοποιηθεί ψηφιακά, οπότε δειγματοληπτούμε το σήμα $x_\alpha(t)$, το περνάμε από ένα κατάλληλο ψηφιακό φίλτρο και το ανακατασκευάζουμε με τη χρήση ενός ιδανικού μετατροπέα διακριτού σε συνεχές (D/C), για να λαβουμε το επιθυμητό αναλογικό σήμα. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να αποφύγουμε την επικάλυψη, και για τον ελάχιστο αυτό ρυθμό, να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του ιδανικού ψηφιακού φίλτρου $H(e^{j\omega})$ το οποίο θα απομακρύνει τις ζητούμενες συχνότητες από το $x_\alpha(t)$.

Λύση

Επειδή η μέγιστη συχνότητα που εμφανίζεται στο $x_\alpha(t)$ είναι 20 KHz, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να παρατηρηθεί αναδίπλωση, είναι $f_s = 40$ KHz. Η σχέση που συνδέει τη συνεχή συχνότητα Ω με τη διακριτή συχνότητα ω, είναι

$$\omega = \Omega T_s$$

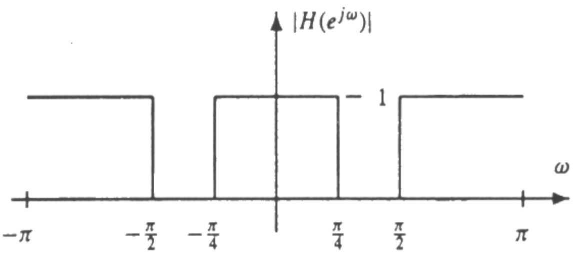
ή

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

Επομένως η περιοχή συχνοτήτων 5 KHz$\leq f \leq 10$ KHz αντιστοιχεί στην περιοχή διακριτών συχνοτήτων

$$\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$$

και το ζητούμενο ιδανικό ψηφιακό φίλτρο είναι ένα φίλτρο αποκοπής ζώνης με απόκριση συχνότητας, η οποία απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



∎

Άσκηση 9

Ένα μεγάλο πρόβλημα στη καταγραφή ενός ηλεκτροκαρδιογραφήματος (ECG), είναι η εμφάνιση ανεπιθύμητων παρεμβολών στη συχνότητα των 50Hz, στην έξοδο. Οι αιτίες των παρεμβολών αυτών της γραμμής του δικτύου περιλαμβάνουν φαινόμενα όπως τη μαγνητική επαγωγή, τα ρεύματα μετατόπισης (displacement currents) στους μονωμένους ακροδέκτες που βρίσκονται στο σώμα του ασθενούς και τις επαφές των συνδέσεων μεταξύ των διαφόρων συσκευών. Θεωρούμε ότι το εύρος ζώνης του σήματος που μας ενδιαφέρει (ωφέλιμο σήμα) είναι 1KHz, δηλαδή

$$X_\alpha(f) = 0 \qquad |f| > 1000Hz$$

Το αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε ένα σήμα διακριτού χρόνου με τη βοήθεια ενός ιδανικού μετατροπέα A/D στον οποίο χρησιμοποιείται συχνότητα δειγματοληψίας f_s. Το σήμα που προκύπτει $x(n) = x(nT_s)$, επεξεργάζεται στη συνέχεια με τη βοήθεια ενός συστήματος διακριτού χρόνου (φίλτρο 2ης τάξης) το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-1) + bx(n-2)$$

Το σήμα εξόδου $y(n)$ του φίλτρου, μετατρέπεται στη συνέχεια σε αναλογικό σήμα με τη βοήθεια ενός ιδανικού μετατροπέα D/A. Ζητείται, προσδιορίζοντας τιμές για τη συχνότητα f_s και τους συντελεστές α και b, να σχεδιαστεί ένα σύστημα το οποίο να απομακρύνει το σήμα παρεμβολής των 50Hz, δηλαδή σήματα της μορφής

$$w_\alpha(t) = A\sin(100\pi t) = A\sin(2\pi 50t)$$

να μην εμφανίζεται στην έξοδο του μετατροπέα D/A.

Λύση

Το σήμα από το οποίο πρέπει να απομακρυνθεί η συνιστώσα των $50Hz$ έχει εύρος ζώνης που περιορίζεται στα 1000 Hz. Συνεπώς, για να αποφύγουμε την επικάλυψη κατά τη δειγματοληψία του σήματος αυτού, απαιτείται μια συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s \geq 2000Hz$$

Χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο ρυθμό των 2000Hz, παρατηρούμε ότι το σήμα των 50Hz, $w_\alpha(t) = A\sin(100\pi t)$ γίνεται

$$w(n) = w_\alpha(nT_s) = \sin\left(\frac{100\pi n}{2000}\right) = \sin(n\omega_0)$$

όπου $\omega_0 = 0.05\pi$. Υπενθυμίζεται εδώ, ότι οι μιγαδικές εκθετικές ακολουθίες αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων (ΓΧΑ) συστημάτων. Επομένως, αν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(n) = e^{jn\omega_0}$, η έξοδός του είναι

$$y(n) = H(e^{j_0})e^{jn\omega_0}$$

Επειδή

$$w(n) = \frac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{2j}$$

η $w(n)$ θα απομακρυνθεί από τη $x(n)$ αν σχεδιάσουμε ένα φίλτρο έτσι ώστε η $H(e^{j\omega})$ να είναι ίση με το μηδέν, για $\omega = \pm\omega_0$. Επειδή η $H(e^{j\omega})$ αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο δεύτερης τάξης με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega} + be^{-j2\omega}$$

μπορεί να παραγοντοποιηθεί ώς εξής:

$$H(e^{j\omega}) = (1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})$$

Άρα, η $H(e^{j\omega})$ θα είναι ίση με το μηδέν για $\omega = \pm\omega_0$, αν είναι $\alpha = e^{j\omega_0}$ και $b = e^{-j\omega_0}$. Στη περίπτωση αυτή, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 2(\cos\omega_0)e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

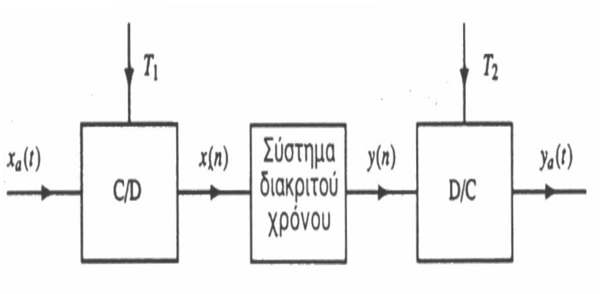
Άρα, οι απαιτήσεις μας τελικά είναι

$$a = -2\cos\omega_0 = 2\cos(0.05\pi) \quad b = 1$$

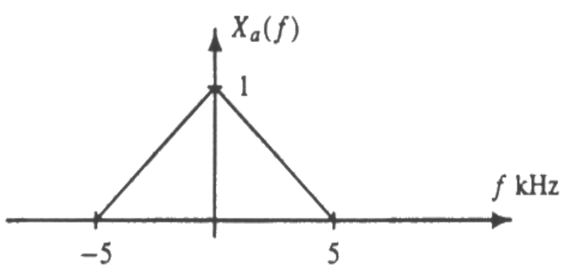
και $f_s = 2000$. ∎

Άσκηση 10

Το παρακάτω σύστημα χρησιμοποιείται για την ψηφιακή επεξεργασία ενός αναλογικού σήματος



Υποθέτουμε ότι το σήμα $x_\alpha(t)$ έχει περιορισμένο εύρος ζώνης με $X_\alpha(f) = 0$ για $|f| > 5$ KHz, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα,



και ότι το σύστημα διακριτού χρόνου είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\pi/2$.

(α) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $y_\alpha(t)$ αν οι συχνότητες δειγματοληψίας είναι $f_1 = f_2 = 10$ KHz.

(β) Να επαναληφθεί το (α), για $f_1 = 20$ KHz και $f_2 = 10$ KHz.

(γ) Να επαναληφθεί το (α), για $f_1 = 10$ KHz και $f_2 = 20$ KHz.

Λύση

(α) Όταν οι συχνότητες δειγματοληψίας των μετατροπέων C/D και D/C είναι ίσες, και το $x_\alpha(t)$ έχει περιορισμένο εύρος ζώνης με $X_\alpha(j\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \pi/T_1$, το σύστημα αυτό ισοδυναμεί με ένα αναλογικό φίλτρο με απόκριση συχνότητας

$$H_\alpha(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_1}) \ , & |\Omega| < \frac{\pi}{T_1} \\ 0 \ , & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς, αν η $H(e^{j\omega})$ αντιστοιχεί σε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\pi/2$, η συχνότητα αποκοπής του $H_\alpha(j\Omega)$, που συμβολίζεται με Ω_0, δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2}$$

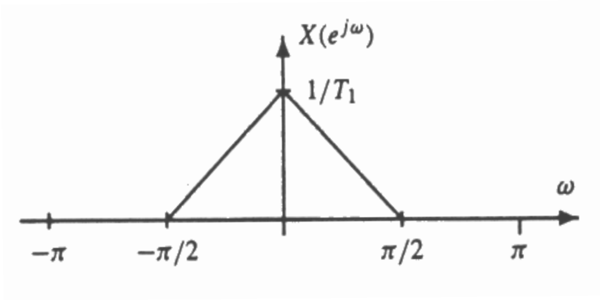
ή ισοδύναμα,

$$2\pi f_0 \cdot T_1 = \frac{\pi}{2}$$

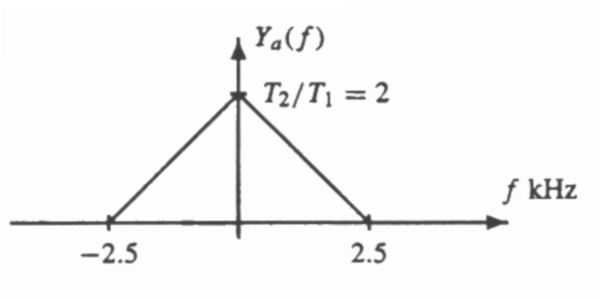
Άρα είναι

$$f_0 = \frac{1}{4} f_1 = 2,5KHz$$

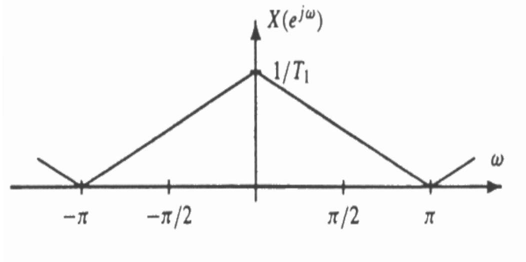
(β) Όταν οι συχνότητες δειγματοληψίας των μετατροπέων C/D και D/C διαφέρουν, είναι προτιμότερο να κάνουμε τη γραφική παράσταση του φάσματος των σημάτων, όπως αυτά εξελίσσονται μέσα στο σύστημα. Με τη $X_\alpha(f)$ όπως φαίνεται παραπάνω, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της $x(n)$ είναι



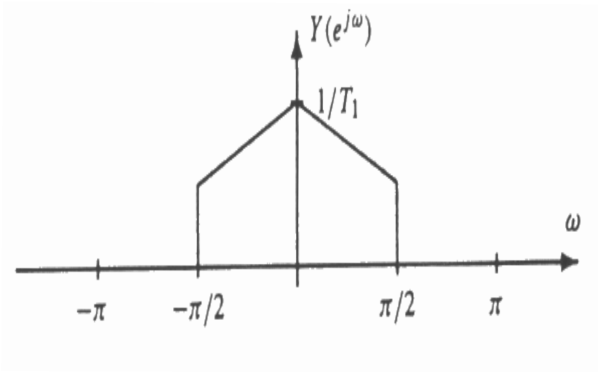
Επειδή η συχνότητα αποκοπής του χαμηλοπερατού φίλτρου διακριτού χρόνου είναι ίση με $\pi/2$, είναι $y(n) = x(n)$ και η έξοδος του μετατροπέα D/C είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



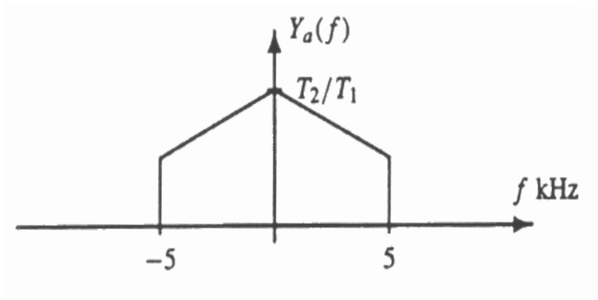
(γ) Με $f_1 = 10$ KHz, κάνουμε δειγματοληψία του σήματος $x_\alpha(t)$ στο ρυθμό Nyquist και το φάσμα της $x(n)$ είναι



ενώ η έξοδος του χαμηλοπερατού φίλτρου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επομένως, το φάσμα της $y_\alpha(t)$ είναι αυτό που παριστάνεται στη συνέχεια:



■

Άσκηση 11

Θεωρούμε το συνολικό σύστημα της προηγούμενης άσκησης για την ψηφιακή επεξεργασία ενός σύματος συνεχούς χρόνου. Θεωρούμε επίσης, ότι η είσοδος του μετατροπέα C/D περιορίζεται σε ένα εύρος ζώνης $\Omega_0 = \Omega_s/2$ καθώς επίσης και ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου είναι

$$h(n) = \delta(n) - 0.9\delta(n-1)$$

Να βρεθεί η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού.

Λύση

Θεωρώντας σήμα εισόδου περιορισμένου εύρους ζώνης με $X_\alpha(j\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \Omega_s/2$ η έξοδος $Y_\alpha(j\Omega)$ σχετίζεται με την είσοδο $X_\alpha(j\Omega)$ ώς εξής:

$$Y_\alpha(j\Omega) = H_\alpha(j\Omega)X(j\Omega)$$

όπου

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επειδή η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου είναι

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 0.9e^{-j\omega}$$

τότε θα είναι

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} 1 - 0.9e^{-j\Omega T_s} & |\Omega| < \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

■

Άσκηση 12

Για το σύστημα της προηγούμενης άσκησης, θεωρώντας ότι το σήμα εισόδου $x_\alpha(t)$ είναι περιορισμένου εύρους ζώνης έτσι ώστε, $X_a(f) = 0$ για $|f| > 10$ KHz, να βρεθεί το σύστημα διακριτού χρόνου που παράγει στην έξοδο το σήμα $y_\alpha(t)$ για το οποίο ισχύει

$$Y_\alpha(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega X_\alpha(j\Omega) & 4000\pi \leq |\Omega| \leq 16000\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι η απόκριση συχνότητας (μέτρο) του συνεχούς χρόνου συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$H_\alpha(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega & 4000\pi \leq |\Omega| \leq 16000\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

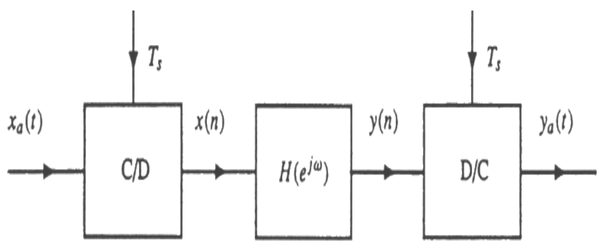
Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 20$ KHz, η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου θα πρέπει να είναι

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\frac{\omega}{T_s}\ , & 0.2\pi \leq |\omega| \leq 0.8\pi \\ 0\ , & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $T_s = 1/20000$. ■

Άσκηση 13

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα επεξεργασίας ενός σήματος συνεχούς χρόνου με τη βοήθεια ενός συστήματος διακριτού χρόνου:



Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου διακριτού χρόνου είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2(\frac{1}{3} - e^{-j\omega})}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Αν είναι $f_s = 2\text{KHz}$ και $x_\alpha(t) = \sin(1000t)$, να βρεθεί η έξοδος $y_\alpha(t)$.

Λύση

Κάνοντας τη δειγματοληψία στο σήμα $x_\alpha(t) = \sin(1000\pi t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2000$, παράγεται η ακολουθία διακριτού χρόνου

$$x(n) = x_\alpha(nT_s) = \sin(1000\pi nT_s) = \sin(\frac{n\pi}{2})$$

Στη συνέχεια η ακολουθία αυτή περνά μέσα από το φίλτρο διακριτού χρόνου

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2(\frac{1}{3} - e^{-j\omega})}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Επειδή η $x(n)$ είναι ημιτονοειδής, η απόκριση είναι

$$y(n) = A\sin(\frac{n\pi}{2} + \phi)$$

όπου A και ϕ είναι αντίστοιχα, το πλάτος και η φάση της απόκρισης συχνότητας, για $\omega = \pi/2$. Με

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|^2 = 4\frac{(\frac{1}{3} - e^{-j\omega})}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \cdot \frac{(\frac{1}{3} - e^{j\omega})}{1 - \frac{1}{3}e^{j\omega}}\bigg|_{\omega=\pi/2} = 4\frac{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\omega)}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\omega)}\bigg|_{\omega=\pi/2} = 4$$

έπεται ότι $|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 2$. Τη φάση μπορούμε να την υπολογίσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 2\frac{\frac{1}{3} - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{j\omega}} \\ &= 2\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{9}e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{|1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}|^2} = 2\frac{\frac{2}{3} - \frac{10}{9}\cos\omega + j\frac{8}{9}\sin\omega}{|1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}|^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Επομένως,

$$\phi_h(\omega) = \tan^{-1}\frac{\frac{8}{9}\sin\omega}{\frac{2}{3} - \frac{10}{9}\cos\omega}$$

το οποίο για $\omega = \pi/2$, δίνει

$$\phi_h(\omega)|_{\omega=\pi/2} = \tan^{-1}\frac{8/9}{2/3} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 0.2952$$

Άρα, είναι τελικά,

$$y(n) = 2\sin(\frac{\pi}{2}[n + 0.5903])$$

■

C. Μετατροπή Ρυθμού Δειγματοληψίας

Άσκηση 14

Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία διακριτού χρόνου $x(n)$ έχει περιορισμένο εύρος ζώνης έτσι ώστε

$$X(e^{j\omega}) = 0 \qquad 0.3\pi < |\omega| < \pi$$

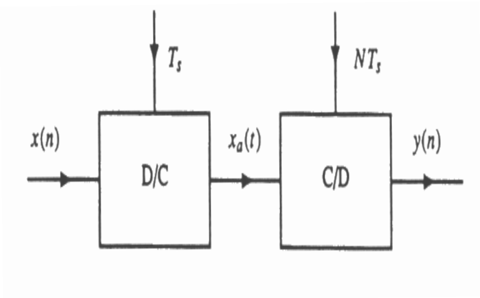
Στη συνέχεια κάνουμε δειγματοληψία στην ακολουθία αυτή ώστε να σχηματίσουμε μια άλλη ακολουθία

$$y(n) = x(nN)$$

όπου N είναι ένας ακέραιος. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του N για την οποία η $x(n)$ μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο από τη $y(n)$.

Λύση

Ο ευκολότερος τρόπος για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, είναι αυτός που περιγράφεται με το ακόλουθο σχήμα.



Μετατρέποντας την ακολουθία $x(n)$ σε ένα σήμα συνεχούς χρόνου, με τη βοήθεια ενός μετατροπέα D/C και με συχνότητα δειγματοληψίας f_s, παράγεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x_\alpha(t)$ του οποίου το εύρος ζώνης περιορίζεται σε $f_0 = 0.3 \cdot f_s/2$. Άρα μπορεί να γίνει δειγματοληψία του σήματος $x_\alpha(t)$, χωρίς να προκύψει επικάλυψη, αν χρησιμοποιήσουμε συχνότητα δειγματοληψίας $f'_s \geq 2f_0 = 0.3f_s$, ή

$$T'_s < \frac{T_s}{0.3} = 3.33\bar{3}T_s$$

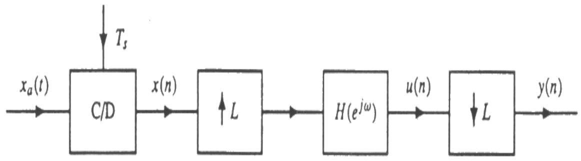
Επομένως, αν είναι $T'_s = 3T_s$, τότε θα είναι

$$y(n) = x_\alpha(3nT_s) = x(3n)$$

και η $x(n)$ μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο από τη $y(n)$. Άρα, $N_{max} = 3$. ■

Άσκηση 15

Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα:



Υποθέτουμε ότι είναι $X_\alpha(j\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \pi/T_s$ και ότι

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| \leq \frac{\pi}{L} \\ 0 & \frac{\pi}{L} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Με ποιό τρόπο, η έξοδος του συστήματος διακριτού χρόνου, $y(n)$, σχετίζεται με το σήμα εισόδου $x_\alpha(t)$;

Λύση

Στο σύστημα αυτό, το σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x_\alpha(t)$, υφίσταται δειγματοληψία χωρίς πρόβλημα και παράγεται το σήμα $x(n) = x_\alpha(nT_s)$. Με υπερδειγματοληψία της $x(n)$ με ένα συντελεστή L και περνώντας την μέσα από ένα ιδανικό ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/L$, παράγεται το σήμα

$$w(n) = x_\alpha\Big(\frac{nT_s}{L}\Big)$$

δηλαδή, ένα σήμα που έχει υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα δειγματοληψίας Lf_s. Βέβαια, επειδή το χαμηλοπερατό φίλτρο έχει μια γραμμική φάση με καθυστέρηση ομάδας του ενός δείγματος, το σήμα που έχει υποστεί υπερδειγματοληψία κι έχει φιλτραριστεί καθυστερεί κατα ένα δείγμα (ο συνδυασμός του υπερδειγματολήπτη και του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου καλείται σύστημα παρεμβολής). Συνεπώς, η έξοδος του χαμηλοπερατού φίλτρου είναι

$$u(n) = w(n-1) = x_\alpha\Big([n-1]\frac{T_s}{L}\Big)$$

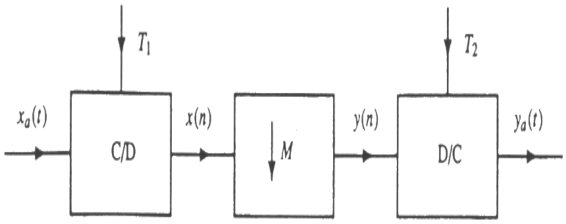
Στη συνέχεια, υποδειγματοληπτώντας κατά ένα συντελεστή L, παράγεται η έξοδος,

$$y(n) = u(Ln) = w(Ln-1) = x_\alpha\Big(nT_s - \frac{T_s}{L}\Big)$$

Άρα, η $y(n)$ αντιστοιχεί στα δείγματα της $x_\alpha(t - t_0)$ όπου $t_0 = T_s/L$. ∎

Άσκηση 16

Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



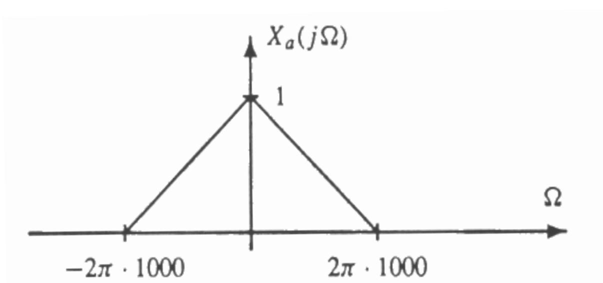
Θεωρούμε ότι η είσοδος έχει περιορισμένο εύρος ζώνης, με $X_\alpha(j\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 2\pi \cdot 1000$.

(α) Τι περιορισμοί πρέπει να τεθούν στις παραμέτρους M, T_1 και T_2 ώστε το $y_\alpha(t)$ να ισούται με το $x_\alpha(t)$;

(β) Αν είναι $f_1 = f_2 = 20\text{KHz}$ και $M = 4$, να βρεθεί μια έκφραση για το $y_\alpha(t)$ συναρτήσει του $x_\alpha(t)$.

Λύση

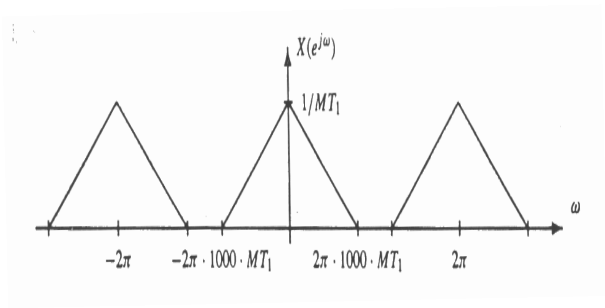
(α) Υποθέτουμε ότι το $x_\alpha(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier σαν αυτόν που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



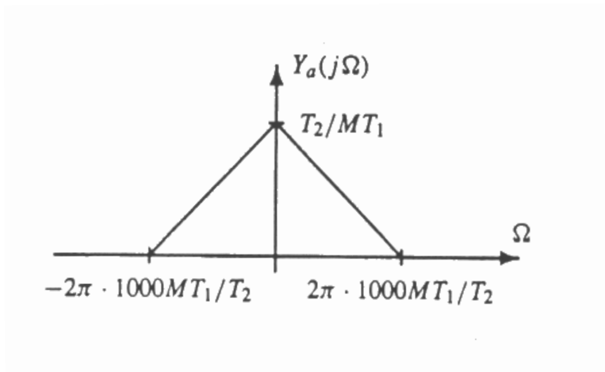
Επειδή είναι $y(n) = x(Mn) = x_\alpha(nMT_1)$, για να αποφύγουμε την επικάλυψη στη $x(n)$, απαιτείται να είναι

$$MT_1 < \frac{1}{2000}$$

Αν ο περιορισμός αυτός ικανοποιείται, η έξοδος του διαιρέτη συχνότητας έχει DTFT σαν αυτόν που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Με τη διέλευση μέσα από το μετατροπέα D/C, παράγεται ένα σήμα $y_\alpha(t)$, το οποίο έχει το μετασχηματισμό Fourier που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επομένως, για να είναι το $y_\alpha(t)$ ίσο με το $x_\alpha(t)$, απαιτείται να είναι

1. $MT_1 \leq 1/2000$ για να αποφύγουμε την αναδίπλωση συχνοτήτων.
2. $T_2 = MT_1$ για να αποφύγουμε κλιμάκωση στη συχνότητα.

(β) Με $T_1 = T_2 = 1/20000$ και $M = 4$, παρατηρούμε ότι

$$MT_1 = \frac{1}{5000} < \frac{1}{2000}$$

Επομένως, δεν παρουσιάζεται αναδίπλωση συχνοτήτων. Άρα, όπως βλέπουμε και από το σχήμα παραπάνω,

$$Y_\alpha(j\Omega) = \frac{1}{4}X_\alpha\Big(\frac{j\Omega}{4}\Big)$$

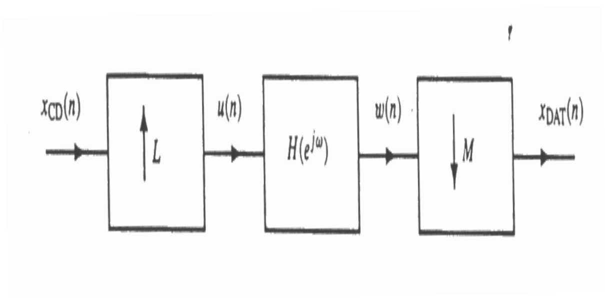
η

$$y_\alpha(t) = x_\alpha(4t)$$

■

Άσκηση 17

Τα συστήματα οδήγησης των ψηφιακών ταινιοφώνων (Digital Audio Tapes ή DAT) λειτουργούν με συχνότητα δειγματοληψίας 48 KHz, ενώ οι συσκευές αναπαραγωγής δίσκων λέιζερ (CD Player) λειτουργούν στο ρυθμό των 44.1 KHz. Για να πραγματοποιηθεί απευθείας ηχογράφηση από ένα CD σε ένα DAT, είναι απαραίτητη η μετατροπή του ρυθμού δειγματοληψίας απο 44.1 σε 48 KHz. Έτσι, θεωρούμε το παρακάτω σύστημα μετατροπής του ρυθμού δειγματοληψίας:



Να προσδιορισθούν οι μικρότερες δυνατές τιμές για τις παραμέτρους M και L, καθώς επίσης να προσδιορισθεί το κατάλληλο φίλτρο $H(e^{j\omega})$, για τη ζητούμενη μετατροπή.

Λύση

Δεδομένου ότι είναι $48000 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^3$ και $41000 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, για να μεταβληθεί ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να είναι

$$\frac{L}{M} = \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{2^5 \cdot 5}{3 \cdot 7^2} = \frac{160}{147}$$

Επομένως, αν κάνουμε υπερδειμγατοληψία με ένα συντελεστή $L = 160$ και στη συνέχεια κάνουμε υποδειγματοληψία με ένα συντελεστή $M = 147$, πετυχαίνουμε τη ζητούμενη μετατροπή του ρυθμού δειγματοληψίας. Το χαμηλοπερατό φίλτρο που απαιτείται είναι εκείνο το οποίο έχει συχνότητα αποκοπής

$$\omega_c = min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right) = \frac{\pi}{160}$$

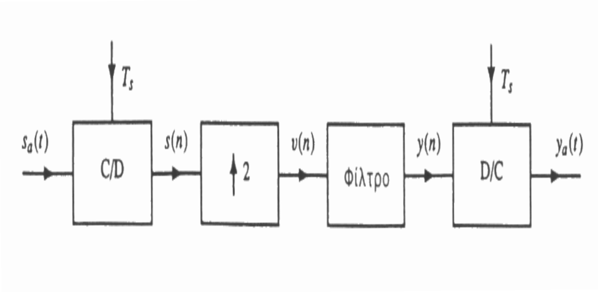
και το κέρδος (ενίσχυση) του φίλτρου πρέπει να είναι ίσο με $L = 160$. ■

Άσκηση 18

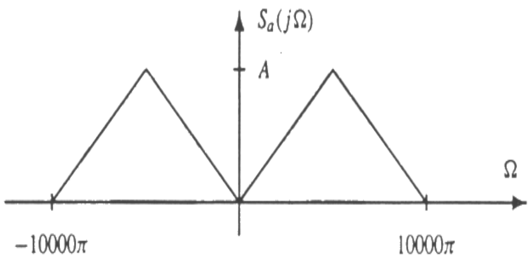
Υποθέτουμε ότι ζητείται να επιβραδυνθεί ένα τμήμα σήματος φωνής κατά το μισό της κανονικής του ταχύτητας. Το σήμα φωνής $s_\alpha(t)$ θεωρείται ότι έχει μηδενική ενέργεια έξω από ένα εύρος των 5 KHz και ότι υφίσταται δειγματοληψία με ρυθμό 10 KHz, οπότε παράγεται η ακολουθία

$$s(n) = s_\alpha(nT_s)$$

Προτείνεται το παρακάτω σύστημα για τη δημιουργία της επιβράδυνσης του σήματος φωνής.



Επίσης θεωρούμε ότι η $S_\alpha(j\Omega)$ είναι αυτή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



(α) Να βρεθεί το φάσμα της $v(n)$.

(β) Υποθέτουμε ότι το φίλτρο διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

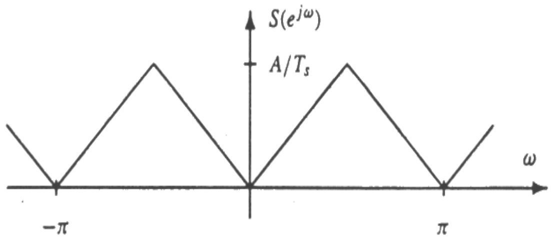
$$y(n) = \frac{1}{2}(v(n-1) + 2v(n) + v(n+1))$$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του φίλτρου αυτού και να περιγραφεί η επίδρασή του στο σήμα $v(n)$.

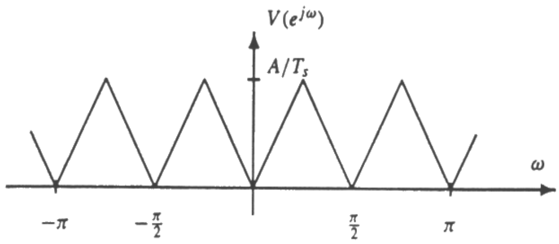
(γ) Πως εκφράζεται η $Y_\alpha(j\Omega)$ συναρτήσει της $X_\alpha(j\Omega)$; Αντιστοιχεί το σήμα $y_\alpha(t)$ στην επιβραδυνόμενη φωνή;

Λύση

(α) Εφόσον πραγματοποιείται δειγματοληψία του σήματος $s_\alpha(t)$ στο ρυθμό Nyquist, ο DTFT του σήματος φώνής μετά τη δειγματοληψια, $s(n)$, έχει ως εξής:



Κάνοντας υπερδειγματοληψία με ένα συντελεστή 2 κλιμακώνεται ο άξονας της συχνότητας του $S(e^{j\omega})$ κατά ένα συντελεστή 2, όπως φαίνεται παρακάτω.



(β) Η κρουστική απόκριση του φίλτρου διακριτού χρόνου είναι

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

το οποίο έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \cos\omega$$

Για να εξετάσουμε την επίδραση του φίλτρου αυτού στο σήμα $v(n)$, παρατηρούμε ότι εξαιτίας της υπερδειγματοληψίας, θα είναι $v(n) = 0$ για περιττές τιμές του n. Επομένως, έχοντας

$$y(n) = u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) + \frac{1}{2}u(n+1)$$

έπεται ότι είναι

$$y(n) = \begin{cases} u(n) & n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{2}u(n-1) + \frac{1}{2}u(n+1) & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άρα οι τιμές της $v(n)$ για περιττούς δείκτες n παραμένουν αμετάβλητες, ενώ για άρτιους δείκτες οι αντίστοιχες τιμές είναι ο μέσος όρος των δύο γειτονικών τιμών. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε την $h(n)$ που πραγματοποιεί γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών της $v(n)$.

(γ) Η έξοδος του μετατροπέα D/C, $y_\alpha(t)$, έχει μετασχηματισμό Fourier

$$Y_\alpha(j\Omega) = \begin{cases} T_s Y(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφόσον είναι

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})V(e^{j\Omega}) = (1 + \cos\omega)V(e^{j\Omega})$$

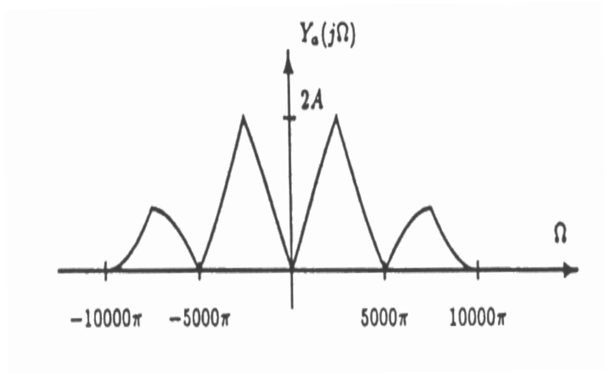
και

$$V(e^{j\Omega}) = S(e^{j2\Omega})$$

τότε θα είναι

$$Y_\alpha(j\Omega) = \begin{cases} T_s(1 + \cos\Omega T_s)S(e^{j2\Omega T_s}) & |\Omega| < 10000\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

που είναι το γινόμενο των παραστάσεων $(1 + \cos\Omega T_s)$ και $T_s S(e^{j2\Omega T_s})$ όπως, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

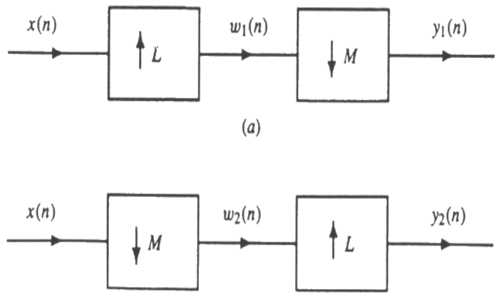


Επομένως, το σήμα $y_\alpha(t)$, δεν αντιστοιχεί στο σήμα φωνής που έχει επιβραδυνθεί εξαιτίας των ειδώλων της $s_\alpha(t)$ που εμφανίζονται στη περιοχή συχνοτήτων $5000\pi < |\Omega| < 10000\pi$ και του πραγματικού (μη ιδανικού) γραμμικού παρεμβολέα (interpolator). Παρατηρούμε ότι, μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν η χρήση του μετατροπέα D/C με ρυθμό δειγματοληψίας $2T_s$ με σκοπό να εξαλειφθούν τα είδωλα

∎

Άσκηση 19

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο διαφορετικοί τρόποι σύνδεσης σε σειρά ενός υπερδειγματολήπτη και ενός υποδειγματολήπτη.



(α) Αν είναι $L = M$, να δειχθεί ότι τα δύο συστήματα δεν είναι πανομοιότυπα.

(β) Κάτω από ποιες συνθήκες, τα δύο συστήματα αυτά θα είναι πανομοιότυπα;

Λύση

(α) Στο πρώτο σύστημα που αποτελείται από ένα υπερδειγματολήπτη ο οποίος ακολουθείται από ένα υποδειγματολήπτη, παρατηρούμε ότι η $w_1(n)$ είναι μια ακολουθία η οποία σχηματίζεται με την εισαγωγή $L-1$ μηδενικών μεταξύ διαδοχικών τιμών της $x(n)$. Στη συνέχεια ο υποδειγματολήπτης εξάγει κάθε L-οστή ($M = L$)τιμή της $w_1(n)$, δηλαδή παράγει την έξοδο,

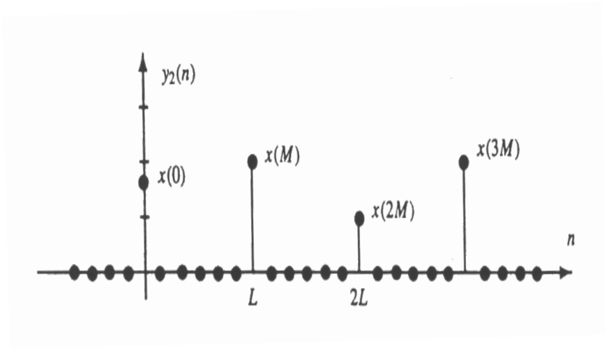
$$y_1(n) = x(n)$$

Στο δεύτερο σύστημα όμως, ο υποδειγματολήπτης εξάγει κάθε L-οστό δείγμα της $x(n)$ και απορρίπτει τα υπόλοιπα. Ο υπερδειγματολήπτης στη συνέχεια, εισάγει $L-1$ μηδενικά μεταξύ των διαδοχικών τιμών της $w_2(n)$. Συνεπώς είναι,

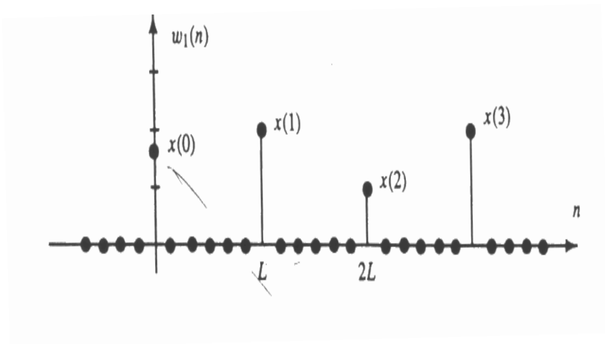
$$y_2(n) = \begin{cases} x\left(\frac{nM}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα τα δύο συστήματα δεν είναι ίδια.

(β) Για να αναλύσουμε τα συστήματα αυτά όταν $L \neq M$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η $y_2(n)$ στο δεύτερο σύστημα έχει τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Από την άλλη πλευρά, η ακολουθία $w_1(n)$ στο πρώτο σύστημα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Παρατηρούμε ότι η $y_1(n)$ σχηματίζεται με την εξαγωγή κάθε M-οστής τιμής της $w_1(n)$,

$$y_1(n) = w_1(nM)$$

Είναι φανερό ότι,

$$y_1(kL) = w_1(kML) = x(kM)$$

και έτσι είναι

$$y_1(kL) = y_2(kL)$$

Βέβαια, για να είναι η $y_1(n)$ ίση με τη $y_2(n)$, απαιτείται

$$y_1(n) = w_1(nM) = 0 \qquad n \neq kL$$

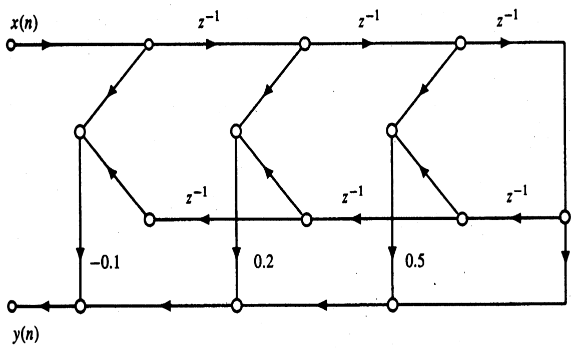
Αυτό θα ισχύει αν και μόνο αν, οι παράμετροι M και L είναι μεταξύ τους πρώτοι.

∎

D. Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Άσκηση 20

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος που ορίζεται από το παρακάτω συστήμα:



Λύση

Στη δομή αυτή αναγνωρίζουμε ένα σύστημα γραμμικής φάσης με κρουστική απόκριση

$$h(n) = -0.1[\delta(n) + \delta(n-6)] + 0.2[\delta(n-1) + \delta(n-5)] + 0.5[\delta(n-2) + \delta(n-4)] + \delta(n-3)$$

Επομένως, η απόκριση συχνότητας είναι

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= -0.1[1 + e^{-j6\omega}] + 0.2[e^{-j\omega} + e^{-j5\omega}] + 0.5[e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}] + e^{-j3\omega} \\ &= e^{-j3\omega}[1 + \cos\omega + 0.4\cos 2\omega - 0.2\cos 3\omega] \end{aligned}$$

■

Άσκηση 21

Ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση

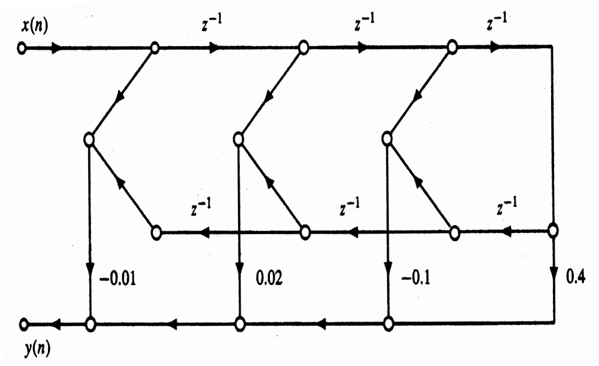
$$\begin{aligned} h(0) &= -0.01 \\ h(1) &= 0.02 \\ h(2) &= -0.10 \\ h(3) &= 0.40 \\ h(4) &= -0.10 \\ h(5) &= 0.02 \\ h(6) &= -0.01 \end{aligned}$$

α) Να σχεδιαστεί ένα διάγραμμα ροής σήματος (signal flow graph) για το σύστημα αυτό, με τον ελάχιστο αριθμό πολλαπλασιασμών.

β) Αν η είσοδος του συστήματος αυτού είναι φραγμένη, $|x(n)| < 1$ για κάθε n, ποια είναι η μέγιστη τιμή στην οποία μπορεί να φτάσει η έξοδος $y(n)$;

Λύση

α) Επειδή το σύστημα αυτό είναι ένα φίλτρο γραμμικής φάσης, μπορεί να υλοποιηθεί με ένα συστήμα που περιλαμβάνει μόνο τέσσερις πολλαπλασιαστές και έξι καθυστερητές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



β) Με είσοδο την $x(n)$, η έξοδος είναι

$$y(n) = \sum_{k=0}^{6} h(k)x(n-k)$$

Επομένως, το πλάτος της εξόδου $y(n)$ είναι άνω φραγμένο, σύμφωνα με τη σχέση

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=0}^{6} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=0}^{6} |h(k)|\,|x(n-k)|$$

Με $|x(n)| < 1$ για κάθε n, θα είναι

$$|y(n)| \leq \sum_{k=0}^{6} |h(k)| = 0.66$$

■

Άσκηση 22

Η κρουστική συνάρτηση απόκρισης ενός φίλτρου FIR είναι

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Να σχεδιαστεί η απευθείας υλοποίηση του συστήματος αυτού.

β) Να δειχθεί ότι η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{1-\alpha^7 z^{-7}}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > 0$$

και να χρησιμοποιηθεί για να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής μιας σε σειρά σύνδεσης ενός συστήματος FIR με ένα σύστημα IIR.

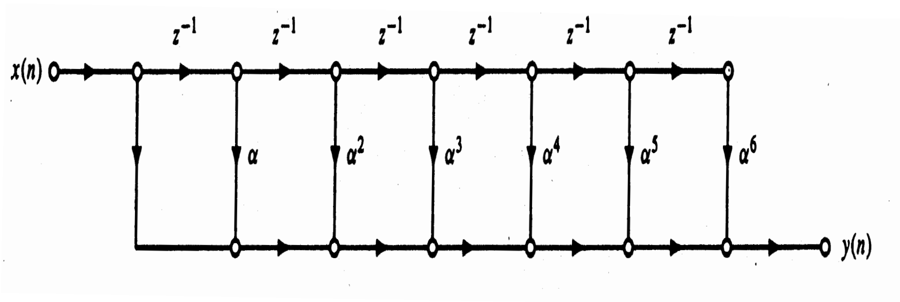
γ) Για τις δύο αυτές υλοποιήσεις, να προσδιοριστεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε μιας ξεχωριστής τιμής της εξόδου καθώς και ο απαραίτητος αριθμός καταχωρητών.

Λύση

α) Με κρουστική απόκριση

$$h(n) = \alpha^n [u(n) - u(n-7)]$$

η υλοποίηση ευθείας μορφής του συστήματος αυτού, είναι αυτή που φαίνεται παρακάτω.



β) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \sum_{n=0}^{6} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{6} \alpha^n z^{-n} = \frac{1-(\alpha z^{-1})^7}{1-\alpha z^{-1}}$$

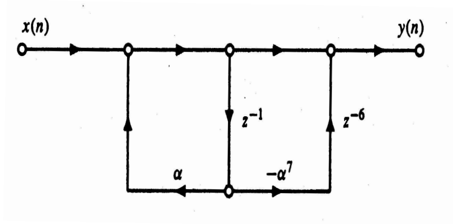
η οποία συγκλίνει για $|z| > 0$. Άρα, η $H(z)$ μπορεί να υλοποιηθεί σαν σε σειρά σύνδεση ενός συστήματος IIR,

$$H_1(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

με ένα σύστημα FIR,

$$H_2(z) = 1 - \alpha^7 z^{-7}$$

Επομένως, μια εναλλακτική υλοποίηση του ίδιου συστήματος, είναι αυτή που φαίνεται παρακάτω.



όπου ο κλάδος που σημειώνεται με το z^{-6} αναπαριστά μια καθυστέρηση κατά 6 (έξι καθυστερητές συνδεδεμένοι σε σειρά).

γ) Η δομή της απευθείας υλοποίησης απαιτεί έξι καθυστερητές, που είναι και ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός για την υλοποίηση του συστήματος αυτού, έξι πολλαπλασιαστές και έξι αθροιστές. Η σε σειρά σύνδεση από την άλλη πλευρά, απαιτεί έναν επιπλέον καθυστερητή, αλλά μόνο δύο συνολικά πολλαπλασιαστές και δύο αθροιστές.

■

Άσκηση 23

Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα DSP που χρησιμοποιείται σε μια εφαρμογή επεξεργασίας σήματος πραγματικού χρόνου(real time), απαιτεί χρόνο για ένα κύκλο εντολής ίσο με 100 ns. Μια από τις εντολές του ρεπερτορίου που διαθέτει το ολοκληρωμένο αυτό είναι η εντολή MACD, με τη βοήθεια της οποίας φορτώνεται μια τιμή από τη μνήμη δεδομένων (σήμα εισόδου), φορτώνεται άλλη μια τιμή από τη μνήμη προγράμματος(συντελεστής φίλτρου), πολλαπλασιάζονται οι δύο αυτοί αριθμοί μεταξύ τους, προστίθεται το γινόμενό που προκύπτει στο συσσωρευτή του συστήματος του ολοκληρωμένου (accumulator) και στη συνέχεια μετακινείται ένας αριθμός της μνήμης δεδομένων στην επόμενη θέση (η ενέργεια αυτή αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση ή καθυστέρηση της ακολουθίας δεδομένων). Έτσι, για τον υπολογισμό της τιμής της εξόδου ενός φίλτρου FIR τάξης N, τη χρόνική στιγμή n, απαιτείται μια εντολή για την ανάγνωση από τον επεξεργαστή της νέας τιμής της εισόδου, $x(n)$, στη συνέχεια απαιτούνται $(N+1)$ εντολές MAC, για τον υπολογισμό του αθροίσματος

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} h(k)x(n-k)$$

και τέλος, μια ακόμα εντολή για την εξαγωγή της τιμής της εξόδου $y(n)$. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται οκτώ ακόμα κύκλοι εντολών για κάθε μία τιμή του n, με σκοπό να εκτελεστούν διάφορες πράξεις όπως τοποθέτηση τιμών σε δείκτες μνήμης, μηδενισμός του συσσωρευτή και άλλες.

α) Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω να προσδιοριστεί το μέγιστο δυνατό εύρος ζώνης του σήματος που μπορεί να φιλτραριστεί με τη βοήθεια ενός φίλτρου FIR τάξης $N = 255$, σε πραγματικό χρόνο και με χρήση ενός μόνο ολοκληρωμένου DSP.

β) Ένα σήμα φωνής $x_\alpha(t)$, υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα $8KHz$. Να προσδιοριστεί το μέγιστο δυνατό μήκος ενός φίλτρου FIR με το οποίο να μπορεί να φιλτραριστεί το σήμα φωνής που υπέστη δειγματοληψία, σε πραγματικό χρόνο.

Λύση

α) Για το συγκεκριμένο τύπο ολοκληρωμένου DSP, χρειαζόμαστε $N+11$ κύκλους εντολής συνολικά για τον υπολογισμό μιας μόνο τιμής της εξόδου ενός φίλτρου FIR τάξης N. Επομένως, με $N = 255$, θα χρειαστούν 266 κύκλοι που ισοδυναμούν με $266 \times 10^{-7}s$, για τον υπολογισμό ενός σημείου της εξόδου. Συνεπώς, το σήμα που πρόκειται να φιλτραριστεί, θα υφίσταται δειγματοληψία σε συχνότητα όχι μεγαλύτερη από

$$f_s = \frac{1}{266 \times 10^{-7}} Hz = 37.6kHz$$

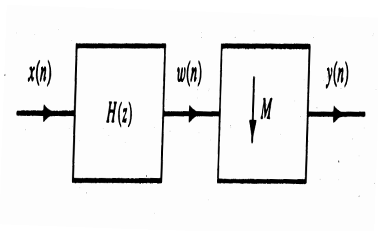
Επομένως, το εύρος ζώνης του σήματος εισόδου περιορίζεται στους 18.8KHz (δηλαδή, πρέπει η $X_\alpha(f)$ να είναι ίση με το μηδέν για $|f| > 18.8$KHz).

β) Η δειγματοληψία του σήματος φωνής στο ρυθμό των 8 KHz, παράγει 8000 δείγματα το δευτερόλεπτο. Συνεπώς, έχουμε στη διάθεσή μας χρόνο, $T_s = 1/8000 = 0.125$ ms, για τον υπολογισμό μιας μόνο τιμής της εξόδου. Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί σε $= (0.125 \times 10^{-3})/10^{-7} = 1250$ κύκλους εντολής. Έτσι, μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα φίλτρο FIR για το σκοπό αυτό, του οποίου το μήκος θα είναι $N = 1250 - 11 = 1239$.

■

Άσκηση 24

Όπως γνωρίζουμε, η μείωση του ρυθμού δειγματοληψίας μπορεί να επιτευχθεί από την σε σειρά σύνδεση ενός χαμηλοπερατού φίλτρου με έναν υποδειγματολήπτη (το συνολικό σύστημα ονομάζεται αποδεκατιστής), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Επειδή ο υποδειγματολήπτης συγκρατεί κάθε φορά μόνο μία από τις M εξόδους του χαμηλοπερατού φίλτρου $H(z)$, αν το M είναι αρκετά μεγάλο, τα περισσότερα από τα σημεία της εξόδου του φίλτρου θα απορρίπτονται. Επομένως, αν η $H(z)$ αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο FIR, δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των τιμών που έχουν απορριφθεί, οπότε κάποιες αποτελεσματικές υλοποιήσεις του αποδεκατιστή (decimator), είναι δυνατές.

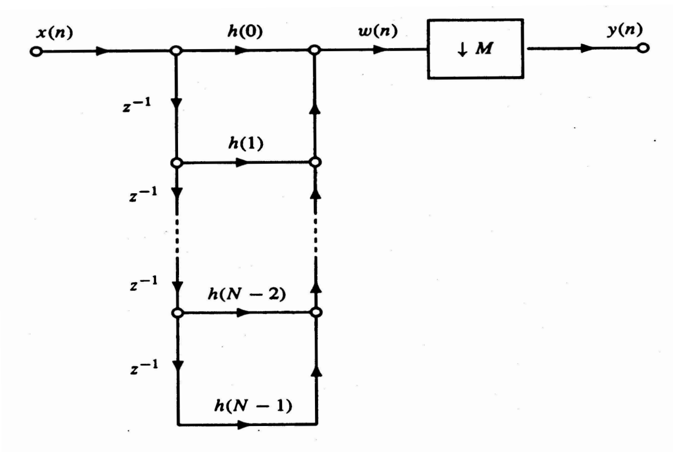
α) Έστω ότι η $H(z)$ αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο FIR με $h(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$. Αν η $H(z)$ υλοποιηθεί με την απευθείας μορφή, να σχεδιαστεί ένα διάγγραμα ροής για τον αποδεκατιστή και να προσδιοριστεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε τιμής της εξόδου $y(n)$.

β) Να χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι κάθε φορά μόνο μία από τις M στο πλήθος τιμές της $w(n)$ συγκρατείται από τον υποδειγματολήπτη με σκοπό να βρεθεί ένας πιο αποτελεσματικός τρόπος υλοποίησης του συστήματος αυτού και να προσδιοριστεί και πάλι ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε μιας ξεχωριστής τιμής της εξόδου $y(n)$.

γ) Αν η $H(z)$ αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο IIR συνεχίζουν να είναι εφικτοί κάποιοι αποτελεσματικοί τρόποι υλοποίησης του αποδεκατιστή; Αν ναι, τότε για ποιες δομές και ποιους παράγοντες είναι περισσότερο αποτελεσματικοί οι τρόποι αυτοί;

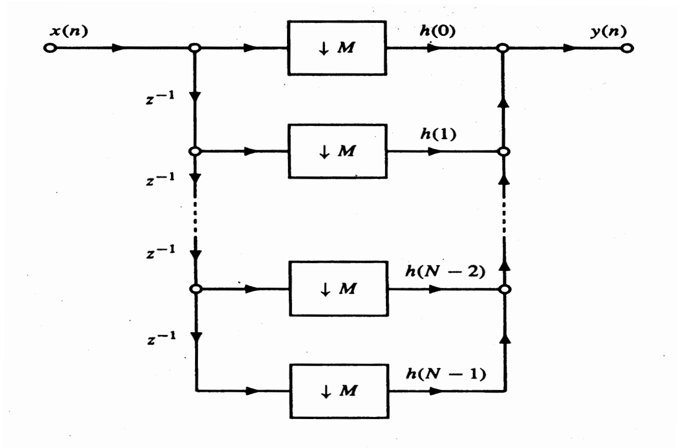
Λύση

α) Σύμφωνα με την υλοποίηση ευθείας μορφής του φίλτρου FIR (z), ο διαιρέτης έχει τη μορφή που φαίνεται παρακάτω.



Επειδή απαιτούνται N πολλαπλασιασμοί και $N-1$ προσθέσεις για τον υπολογισμό κάθε τιμής της $w(n)$ και επειδή υπολογίζεται μόνο μια τιμή της $y(n)$ για κάθε M τιμές της $w(n)$, για κάθε ξεχωριστή τιμή της $y(n)$ εκτελούνται $M \cdot N$ πολλαπλασιασμοί και $M \cdot (N-1)$ προσθέσεις.

β) Επειδή ο υποδειγματολήπτης συγκρατεί κάθε φορά μόνο μία από τις M τιμές της $w(n)$, είναι εφικτή μια πιο αποτελεσματική υλοποίησή του, αν υπολογίζονται μόνο οι τιμές εκείνες που περνούν μέσα από αυτόνς. Κάτι τέτοιο μπορεί να πραγματοποιηθεί ενσωματώνοντας τον υποδειγματολήπτη στο φίλτρο FIR, όπως φαίνεται παρακάτω:

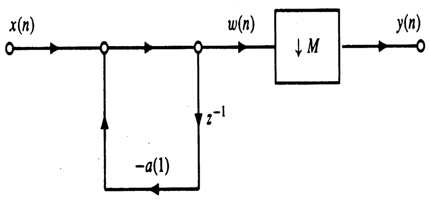


Τώρα, επειδή μόνο ένα κάθε φορά από τα M δείγματα εισόδου πολλαπλασιάζεται με την $h(k)$, η υλοποίηση αυτή απαιτεί μόνο N πολλαπλασιασμούς και N-1 προσθέσεις για τον υπολογισμό κάθε μιας ξεχωριστής τιμής της εξόδου $y(n)$. Έτσι βλέπουμε ότι ο συνολικός αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων έχει μειωθεί M φορές.

γ) Αν η $H(z)$ αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο IIR, στη γενική περίπτωση δεν είναι δυνατό να αντικατασταθεί η λειτουργία του υποδειγματολήπτη από λειτουργίες των κλάδων, όπως είχε γίνει στην περίπτωση του φίλτρου FIR. Για παράδειγμα, αν

$$H(z) = \frac{1}{1 + \alpha(1)z^{-1}}$$

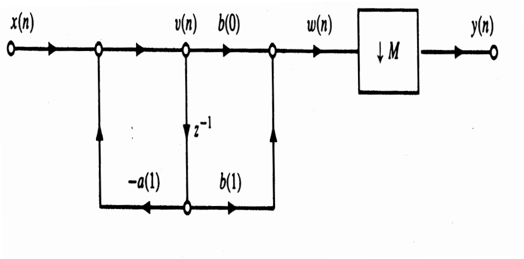
έχουμε το σύστημα πού φαίνεται παρακάτω.



Για τον υπολογισμό, ωστόσο μιας συγκεκριμένης τιμής της $w(n)$ πρέπει να είναι γνωστή η προηγούμενη τιμή, $w(n-1)$. Επομένως, ο υποδειγματολήπτης δεν μπορεί να εναλλαχτεί με κανέναν από τους τελεστές των κλάδων μέσα στο φίλτρο, επειδή κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε απόρριψη τιμών $w(n)$ οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό μελλοντικών τιμών. Από την άλλη πλευρά, θεωρούμε την απευθείας υλοποίηση μορφής ΙΙ, της συνάρτησης

$$H(z) = \frac{b(0) + b(1)z^{-1}}{1 + \alpha(1)z^{-1}}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



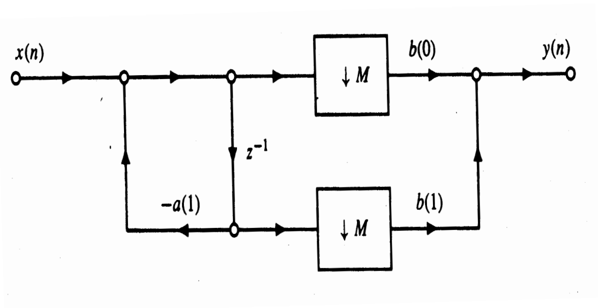
Επειδή είναι

$$w(n) = b(0)v(n) + b(1)v(n-1)$$

και

$$y(n) = w(nM) = b(0)v(nM) + b(1)v(nM-1)$$

ο υποδειγματολήπτης μπορεί να αντικαταστήσει τους τελεστές των κλάδων που εκτελούν τους πολλαπλασιασμούς με τα $b(0)$ και $b(1)$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

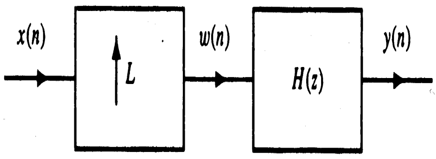


για τον υπολογισμό κάθε μια τιμής της $y(n)$, η δομή αυτή απαιτεί να βρεθούν M τιμές της $v(n)$, που απαιτούν M πολλαπλασιασμούς και M προσθέσεις, καθώς επίσης απαιτεί δύο πολλαπλασιασμούς και μία πρόσθεση για τον υπολογισμό της $y(n)$ από την $v(n)$. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των απαιτούμενων πράξεων είναι $M+2$ πολλαπλασιασμοί και $M+1$ προσθέσεις. Η δομή της απευθείας μορφής ΙΙ είναι η μόνη που επιτρέπει τη σχετική οικονομία των πράξεων. Για τις δομές της ευθείας μορφής Ι, της ανεστραμμένης ευθείας μορφής Ι και της ανεστραμμένης ευθείας μορφής ΙΙ, ο διαιρέτης συχνότητας δειγματοληψίας δε μπορεί να αντικατασταθεί με κανένα από τους τελεστές των κλάδων.

■

Άσκηση 25

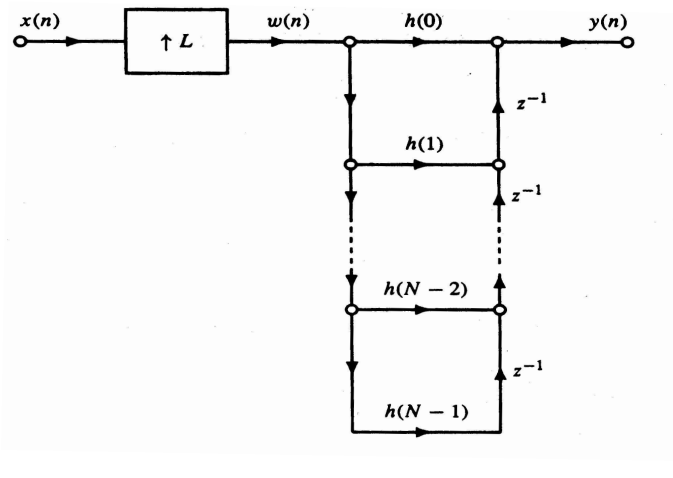
Στην προηγούμενη άσκηση εξετάσθηκαν οι πιθανοί τρόποι απλοποίησης της υλοποίησης ενός αποδεκατιστή (decimator). Παρόμοιες απλοποιήσεις είναι εφικτές και για τον παρεμβολέα που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



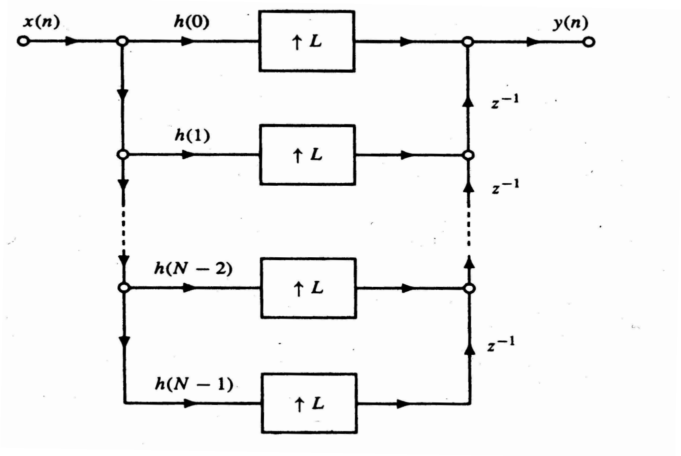
Επειδή ο υπερδειγματολήπτης εισάγει $L-1$ μηδενικά ανάμεσα σε διαδοχικά δείγματα της $x(n)$ να θεωρηθεί ότι η $H(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου FIR και να χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι πολλές τιμές της $w(n)$ είναι ίσες με το μηδέν έτσι ώστε να προκύψει ένας πιο αποτελεσματικός τρόπος υλοποίησης του συστήματος αυτού.

Λύση

Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται μια άμεση υλοποίηση της σε σειρά σύνδεσης ενός υπερδειγματολήπτη και ενός φίλτρου FIR, για την οποία χρησιμοποιείται η δομή της ανεστραμμένης απευθείας μορφής.



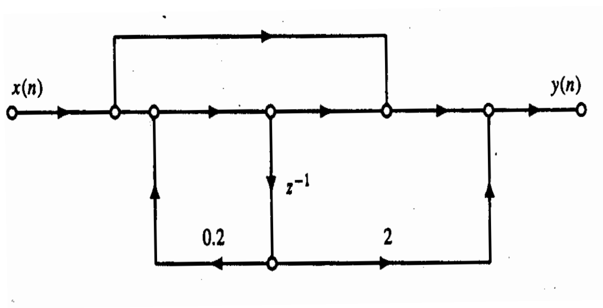
Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός κάθε μιας ξεχωριστής τιμής της εξόδου $y(n)$ απαιτεί N πολλαπλασιασμούς και $N-1$ προσθέσεις. Ωστόσο, μόνο μια κάθε φορά, από τις L τιμές που πολλαπλασιάζονται με τους συντελεστές $h(n)$ είναι διάφορη του μηδενός. Επομένως, είναι προτιμότερο να τροποποιηθεί κατάλληλα η δομή αυτή, έτσι ώστε το φιλτράρισμα να εκτελείται πριν από την εισαγωγή των μηδενικών. Χρησιμοποιώντας τη δομή του σχήματος, μπορεί να γίνει εναλλαγή του πολλαπλασιαστή συχνότητας με τους πολλαπλασιαστές των κλάδων, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα:



Με την απλοποίηση αυτή, απαιτούνται μόνο N πολλαπλασιασμοί και $N-1$ προσθέσεις για κάθε L, στο πλήθος, τιμές εξόδου. ∎

Άσκηση 26

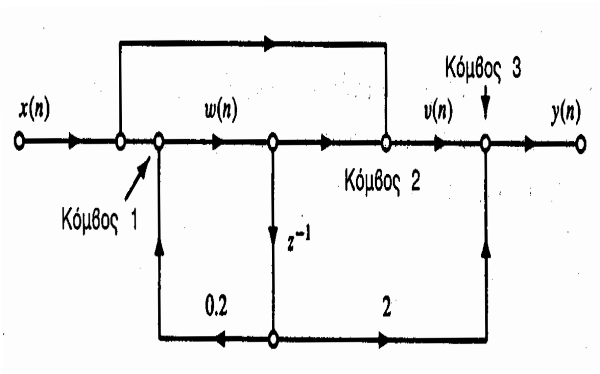
Θεωρούμε τη δομή ενός φίλτρου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος αυτού.

Λύση

Για τους τρεις κόμβους που σημειώνονται στο παρακάτω διάγραμμα ροής,



Έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κόμβων:

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) + 0.2w(n-1) \\ v(n) &= x(n) + w(n) \\ y(n) &= v(n) + 2w(n-1) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$, η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$W(z) = \frac{1}{1-0.2z^{-1}}X(z)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της δεύτερης εξίσωσης και αντικαθιστώντας το $W(z)$, έχουμε:

$$V(z) = X(z) + W(z) = X(z) + \frac{1}{1-0.2z^{-1}}X(z) = \frac{2-02z^{-1}}{1-0.2z{-1}}X(z)$$

Τέλος, λαμβάνοντας το μεταχηματισμό $\mathcal{Z}$ της τελευταίας εξίσωσης, βρίσκουμε

$$Y(z) = V(z) + 2z^{-1}W(z) = \left[\frac{2-0.2z^{-1}}{1-0.2z^{-1}} + 2z^{-1}\frac{1}{1-0.2z^{-1}}\right]X(z) = \frac{2+1.8z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}X(z)$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{2+1.8z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}$$

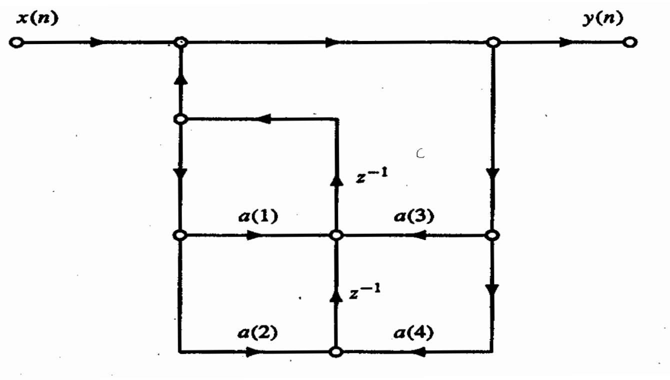
Και η κρουστική απόκριση είναι

$$h(n) = 2(0.2)^n u(n) + 1.8(0.2)^{n-1}u(n-1)$$

∎

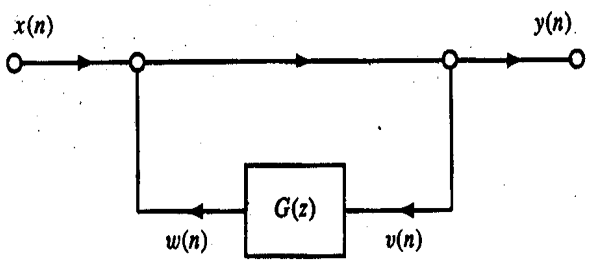
Άσκηση 27

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω συστήματος και να προσδιοριστούν οι συνθήκες για τους συντελεστές $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\alpha(3)$ και $\alpha(4)$, έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές:

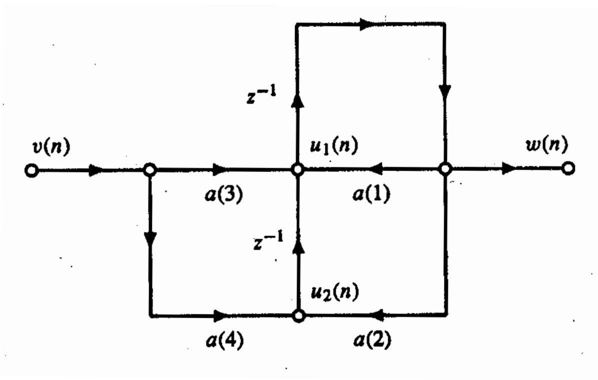


Λύση

Η πρώτη παρατήρηση πάνω στο σύστημα αυτό, είναι ότι αντιστοιχεί σε ένα συστήμα ανάδρασης της μορφής που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Όπου $G(z)$ αντιστοιχεί σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης σαν αυτό που φαίνεται παρακάτω.



Επομένως είναι

$$Y(z) = X(z) + G(z)Y(z)$$

και

$$H(z) = \frac{1}{1 - G(z)}$$

Για να βρεθεί η $G(z)$, ξεκινάμε γράφοντας τις εξισώσεις κόμβων για το συστήμα αυτό:

$$\begin{aligned} u_1(n) &= \alpha(3)v(n) + u_2(n-1) + \alpha(1)w(n) \\ u_2(n) &= \alpha(4)v(n) + \alpha(2)w(n) \\ w(n) &= u_1(n-1) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των πρώτων δύο εξισώσεων, έχουμε

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \alpha(3)V(z) + z^{-1}U_2(z) + \alpha(1)W(z) \\ U_2(z) &= \alpha(4)V(z) + \alpha(2)W(z) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη έχουμε

$$U_1(z) = \alpha(3)V(z) + z^{-1}\left[\alpha(4)V(z) + \alpha(2)W(z)\right] + \alpha(1)W(z)$$

Τέλος, από την τελευταία εξίσωση διαφορών έχουμε

$$W(z) = z^{-1}U_1(z) = z^{-1}\left\{\alpha(3)V(z) + z^{-1}\left[\alpha(4)V(z) + \alpha(2)W(z)\right] + \alpha(1)W(z)\right\}$$

ή

$$W(z)\left[1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2}\right] = \left[\alpha(3)z^{-1} + \alpha(4)z^{-2}\right]V(z)$$

Επομένως είναι

$$G(z) = \frac{W(z)}{V(z)} = \frac{\alpha(3)z^{-1} + \alpha(4)z^{-2}}{1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2}}$$

και για την $H(z)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - G(z)} = \frac{1}{1 - (\alpha(3)z^{-1} + \alpha(4)z^{-2})/(1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2})} \\ &= \frac{1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2}}{1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2} - \alpha(3)z^{-1} - \alpha(4)z^{-2}} \\ &= \frac{1 - \alpha(1)z^{-1} - \alpha(2)z^{-2}}{1 - \left[\alpha(1) + \alpha(3)\right]z^{-1} - \left[\alpha(2) + \alpha(4)\right]z^{-2}} \end{aligned}$$

Σχετικά με την ευστάθεια τώρα, πρέπει και αρκεί, οι συντελεστές $[\alpha(2) + \alpha(4)]$ και $[\alpha(1) + \alpha(3)]$ να βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου ευστάθειας, για το οποίο απαιτείται

$$|\alpha(2) + \alpha(4)| < 1 \qquad \text{και} \qquad |\alpha(1) + \alpha(3)| < 1 - \alpha(2) - \alpha(4)$$

■

Άσκηση 28

Θεωρούμε το φίλτρο χτένας (comb filter)[1] τέταρτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A\frac{1 + z^{-4}}{1 + \alpha^4 z^{-4}}$$

όπου $0 < \alpha < 1$.

[1] Τα φίλτρα χτένας ονομάζονται έτσι εξαιτίας της μορφής της απόκρισης συχνότητάς τους.

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$.

β) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου A, έτσι ώστε η τιμή της κορυφής του κέρδους του φίλτρου να ισούται με 2.

γ) Να βρεθεί μια δομή υλοποίησης του φίλτρου αυτού που απαιτεί μόνο έναν πολλαπλασιαστή.

Λύση

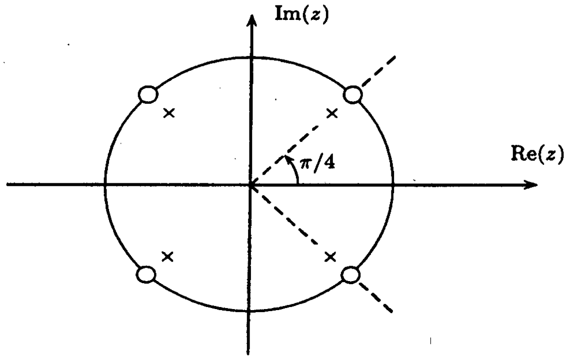
α) Το φίλτρο χτένας έχει τέσσερα μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, στα σημεία

$$\beta_k = e^{j(2k+1)\pi/4}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

καθώς και τέσσερις πόλους στα σημεία

$$\alpha_k = \alpha e^{j(2k+1)\pi/4}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$:



β) Εξαιτίας των μηδενικών που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι μηδέν στις συχνότητες $\omega_k = (2k+1)\pi/4$ για $k = 0, 1, 2, 3$ και αυξάνεται μονότονα μέχρι να φτάσει μια μέγιστη τιμή στις συχνότητες που βρίσκονται στο ενδιάμεσο των μηδενικών για $\omega_k = k\pi/2$. Συνεπώς, για να είναι η τιμή κορυφής του κέρδους του φίλτρου ίση με 2, θέλουμε

$$H(z)|_{z=1} = 2$$

που συνεπάγεται ότι

$$A = \frac{2}{1+\alpha^4} = 2$$

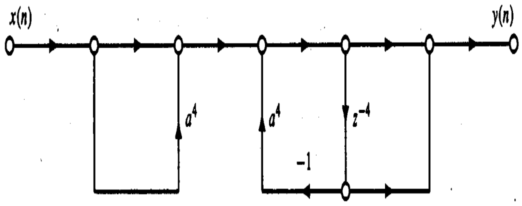
ή

$$A = 1 + \alpha^4$$

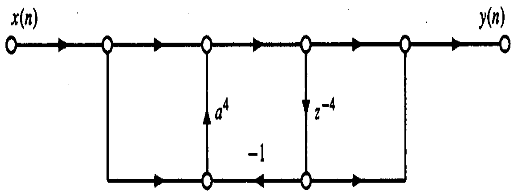
γ) Με τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = (1 + \alpha^4)\frac{1 + z^{-4}}{1 + \alpha^4 z^{-4}}$$

μπορούμε να υλοποιήσουμε το σύστημα αυτό χρησιμοποιώντας δύο πολλαπλασιαστές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε όμως ότι το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με έναν πολλαπλασιαστή ως εξής:



Οι εξισώσεις διαφορών για το δικτύωμα αυτό είναι

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) + \alpha^4 \left[x(n) - w(n-4)\right] \\ y(n) &= w(n) + w(n-4) \end{aligned}$$

∎