Άσκηση 2.0 (Εκτός Βιβλίου) Έστω $x_n = \cos(2\pi\frac{k}{m}n)$ όπου k και m πρώτοι μεταξύ τους. Να βρεθεί η συνθήκη που εξασφαλίζει την περιοδικότητα του σήματος x_n.

Λύση: Είναι γνωστό ότι ένα σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N, όταν $x_{n+N} = x_n$. Άρα θα πρέπει $\cos(2\pi\frac{k}{m}(n+N)) = \cos(2\pi\frac{k}{m}n)$. Επιπλέον $\cos x = \cos y$ όταν και μόνον όταν $x = 2l\pi \pm y$, από το οποίο προκύπτει ότι

$$2\pi\frac{k}{m}(n+N) = (2l\pi \pm 2\pi\frac{k}{m}n).$$

Για την "+" περίπτωση έχουμε τότε ότι $2\pi\frac{k}{m}N = 2l\pi$. Άρα $\frac{k}{m}N = l$. Αφού το m δεν διαιρεί το k θα πρέπει υποχρεωτικά να διαιρεί το N (ώστε το αποτέλεσμα της πράξης $\frac{k}{m}N$ να μπορεί να είναι ο ακέραιος l). Αφού το m διαιρεί το N συμπεραίνουμε ότι $N = im$, όπου i ακέραιος. ο μικρότερος επομένως ακέραιος N που είναι σε θέση να ικανοποιήσει την παραπάνω εξίσωση αντιστοιχεί στην περίπτωση $i = 1$ και αποδίδει $N = m$.

Για την "−" περίπτωση $2\pi\frac{k}{m}n + 2\pi\frac{k}{m}N = 2l\pi - 2\pi\frac{k}{m}$. Οπότε $4\pi\frac{k}{m}n + 2\pi\frac{k}{m}N = 2l\pi$ και τελικά $\frac{k}{m}(2n+N) = l$ που απορρίπτεται γιατί δεν είναι δυνατόν το m να διαιρεί το $2n+N$ για όλες τις τιμές του n.

Λύση Άσκησης 2.1: Έστω $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Για $t = nT_s$, $x_n = x_a(nT_s) = \cos(2\pi f_0 T_s n)$. Οπότε και $x_n = \cos(2\pi\lambda_0 n)$, όπου $\lambda_0 = f_0 T_s$.

Περιοδικότητα : Όταν $x_{n+N} = x_n$, δηλαδή $\cos(2\pi\lambda_0(n+N)) = \cos(2\pi\lambda_0 n)$. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση $\cos x = \cos y$ όταν και μόνον όταν $x = 2k\pi \pm y$.

Άρα : $2\pi\lambda_0 n + 2\pi\lambda_0 N = 2k\pi \pm 2\pi\lambda_0 n$. Πάλι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Για την + περίπτωση: $2\pi\lambda_0 n + 2\pi\lambda_0 N = 2k\pi + 2\pi\lambda_0 n$, επομένως $\lambda_0 = \frac{k}{N}$ (ρητός αριθμός).

Για την − περίπτωση: $2\pi\lambda_0 n + 2\pi\lambda_0 N = 2k\pi - 2\pi\lambda_0 n$, επομένως πάλι $\lambda_0 = \frac{k}{2n+N}$ (ρητός αριθμός).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για άρρητο δεν είναι δυνατόν να ισχύει η περιοδικότητα. Για παράδειγμα σήμα της μορφής $\cos 2\pi\sqrt{2}t$ είναι **μη περιοδικό**.

Λύση Άσκησης 2.3: $x_a(t) = \cos 2\pi 0.2t + \sin 2\pi 1.2t$

α). Μετά από παρατήρηση διαπιστώνεται η περιοδικότητα του σήματος. Η Βασική συχνότητα είναι η

$f_1 = 0.2$ ενώ $f_2 = 6 \times 0.2$ αποτελεί την έκτη αρμονική.

β). $x_n = x_a(nT_s) = \cos(2\pi 0.2 nT_s) + \sin(2\pi 1.2 nT_s)$. Για $T_s = 1$ επομένως έχουμε

$$x_n = \cos(2\pi 0.2n) + \cos(2\pi 1.2n).$$

Λόγω αναδίπλωσης οι συχνότητες μετά τη δειγματοληψία πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα $[-0.5\ 0.5]$, επομένως παρατηρούνται τα εξής:

$1.2 \rightarrow (1.2 - 1) = 0.2$

$0.2 \rightarrow 0.2,$

επομένως το σήμα γράφεται

$$x_n = \cos(2\pi 0.2n) + \sin(2\pi 0.2n)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η βασική συχνότητα είναι 0.2 και ότι **δεν υπάρχει καμία αρμονική!**

Λύση Άσκησης 2.4: Σύμφωνα με την εκφώνηση το ψηφιακό σήμα έχει συχνότητες $\lambda_1 = 0.15, \lambda_2 = 0.2$ και $\lambda_3 = 0.4$. Ως γνωστόν μια ψηφιακή συχνότητα λ αντιστοιχίζεται σε μια αναλογική συχνότητα f μέσω της σχέσης

$$f = \lambda \times f_s.$$

α). Εάν επομένως $f_s = 8$KHz τότε οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντιστοιχίζονται στις $f_1 = 1.2$KHz, $f_2 = 1.6$KHz, $f_3 = 3.2$KHz.

β). Εάν τώρα το ψηφιακό σήμα ανακατασκευαστεί με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0.1$msec που αντιστοιχεί σε $f_s = 10KHz$ τότε η λ_1 αντιστοιχίζεται στην $f_1 = \lambda_1 \times 10,000 = 1500$Hz, η λ_2 στην $f_2 = 2,000$Hz και η λ_3 στην $f_3 = 4,000$Hz.

Δηλαδή εάν οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντιστοιχιστούν στον ρυθμό του αναλογικού σήματος από το οποίο πραγματοποιήθηκε η δειγματοληψία τότε είναι οι πρώτες τιμές, ενώ εάν αντιστοιχιστούν στο ανακατασκευασμένο σήμα τότε είναι οι δεύτερες τιμές.

Λύση Άσκησης 2.11: Το σύστημα είναι συνεχούς χρόνου, γραμμικό, χρονικά σταθερό και αιτιατό. Εάν η Συνάρτηση Μεταφοράς είναι της μορφής :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{L-1} s^{L-1}}{s^L + a_1 s^{L-1} + \cdots + a_L}$$

τότε αναλύοντας σε απλά κλάσματα μπορούμε να γράψουμε

$$H(s)=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_L}{s-s_L},$$

όπου $s_1, s_2, \dots, s_L$ οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) οι οποίοι, για ευκολία, θεωρήθηκαν ότι είναι διαφορετικοί.

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε ότι η κρουστική απόκριση έχει την ακόλουθη μορφή

$$h(t)=(A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_Le^{s_Lt})u(t)$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηαμτική συνάρτηση. Εάν στη συνέχεια δειγματοληπτήσουμε τότε

$$\begin{aligned}
h_n &= h(nT_s)=(A_1e^{s_1T_sn}+\cdots+A_Le^{s_LT_sn})u_n=[A_1(e^{s_1T_s})^n+\cdots+A_L(e^{s_LT_s})^n]u_n\\
&= (A_1z_1^n+\cdots+A_Lz_L^n)u_n
\end{aligned}$$

όπου u_n είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου και ορίζουμε

$$z_i=e^{s_iT_s}. \tag{1}$$

Εάν τώρα υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της h_n τότε

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}h_nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(A_1z_1^n+\cdots+A_Lz_L^n)z^{-n}=A_1\sum_{n=0}^{\infty}(z_1z^{-1})^n+\cdots+A_L\sum_{n=0}^{\infty}(z_Lz^{-1})^n\\
&= \frac{A_1}{1-z_1z^{-1}}\cdots+\frac{A_L}{1-z_Lz^{-1}}=\frac{A_1z}{z-z_1}+\cdots+\frac{A_Lz}{z-z_L}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τα κλάσματα καταλήγουμε στο ότι

$$H(z)=\frac{c_0+\cdots+c_Lz^L}{z^L+d_1z^{L-1}+\cdots+d_L}$$

που είναι λόγος πολυωνύμων του z.

Οι πόλοι μιας μιγαδικής συνάρτησης $H(z)$ είναι τα σημεία z στα οποία η συνάρτηση **απειρίζεται**. Από τη Σχέση (2) παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά είναι τα $z_i, i=1,\dots,L$. Η σχέση δε που συνδέει τους πόλους της $H(z)$ με τους πόλους της $H(s)$ είναι η (1). Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη σχέση αυτή είναι ότι εάν όλοι οι πόλοι s_i του αναλογικού συστήματος έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος (δηλαδή το αναλογικό σύστημα είναι ευσταθές) τότε οι πόλοι του ψηφιακού συστήματος $H(z)$ βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο αφού $|z_i|=|e^{s_iT_s}|=|e^{\mathrm{Re}\{s_i\}T_s+j\mathrm{Im}\{s_i\}T_s}|=|e^{\mathrm{Re}\{s_i\}T_s}|<1$. Για το ίδιο λόγο εάν έστω και ένας πόλος s_i έχει θετικό πραγματικό μέρος τότε και ο αντίστοιχος πόλος z_i είναι εκτός μοναδιαίου κύκλου. Με άλλα λόγια η κρουστική απόκριση h_n αντιστοιχεί σε ένα ευσταθές σύστημα όταν και μόνο η αναλογική κρουστική απόκριση $h(t)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα.

Λύση Άσκησης 2.16: Από τη θεωρία έχουμε ότι η ανακατασκευή $\hat{x}_\alpha(t)$, συναρτήσει των δειγμάτων x_n γράφεται

$$\hat{x}_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \phi(\frac{t}{T_s} - n).$$

Εάν καλέσουμε $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ το Μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\phi(\tau)$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\hat{X}_\alpha(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_\alpha(t) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\frac{t}{T_s} - n) e^{-st} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n T_s e^{-sT_s n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-(sT_s)\tau} d\tau \\
&= T_s \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (e^{sT_s})^{-n} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-(sT_s)\tau} d\tau \right) \\
&= T_s H(e^{sT_s}) \Phi(sT_s),
\end{aligned}$$

όπου, θυμίζουμε ότι, $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας x_n και $\Phi(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\phi(\tau)$.

Για την ειδική περίπτωση που η ανακατασκευή γίνεται με την κλιμακωτή συνάρτηση έχουμε ότι $\phi(\tau) = 1,$ για $|\tau| \leq 0.5$, οπότε

$$\Phi(s) = \int_{-0.5}^{0.5} 1 \cdot e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s}(e^{0.5s} - e^{-0.5s}) = \frac{2}{s} \sinh(0.5s).$$

Όταν τέλος χρησιμοποιείται η τριγωνική ανακατασκευή (που καταλήγει σε γραμμική παρεμβολή μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων), τότε

$$\Phi(s) = \int_{-1}^{0} (1+\tau) e^{-s\tau} d\tau + \int_{0}^{1} (1-\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες τα δύο ολοκληρώματα γίνονται:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} (1+\tau) e^{-s\tau} d\tau &= -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{s} \\
\int_{0}^{1} (1-\tau) e^{-s\tau} d\tau &= -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-s}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα δύο αποτελέσματα καταλήγουμε

$$\Phi(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^2}(e^{s} + e^{-s}) = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2}(\cosh(s) - 1).$$

Λύση Άσκησης 3.1 Το τετραγωνικό παράθυρο ως γνωστόν είναι η ακολουθία

$$\varpi_n = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \cdots, L-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό Fourier

$$\begin{aligned} \Pi_L(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{L-1} 1 e^{-jn\omega} = \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{L}{2}\omega}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{\frac{(e^{j\frac{L}{2}\omega}-e^{-j\frac{L}{2}\omega})}{2j}}{\frac{(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}{2j}} \\ &= e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{L}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\mid \Pi_L(e^{j\omega}) \mid = \left| \frac{\sin(L\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|.$$

Έχοντας τέλος υπόψη ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(Lx)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{L\cos(Lx)}{\cos x} = L$$

συμπεραίνουμε ότι $\mid \Pi_L(e^{j0}) \mid = L$, όπου στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται ο κανόνας του Hospital ή το γεγονός ότι $\sin x \approx x$ για x κοντά στο μηδέν.

Παρατηρούμε ότι $\sin(\frac{L}{2}\omega) = 0$ για $\frac{L}{2}\omega = k\pi$ και άρα $\omega = \frac{2k\pi}{L}$ αποτελούν τα φασματικά κενά (σημεία μηδενισμού) της $\mid \Pi_L(e^{j\omega}) \mid$. Επιλέγοντας τη συχνότητα $\omega_L = \frac{3\pi}{L}$ διαπιστώνουμε

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\Pi_L(e^{j\omega_L})}{L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2L})L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2L}L} = -\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = -0.212$$

όπου πάλι χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ότι $\sin x \approx x$ για x κοντά στο μηδέν.

Λύση μέρους Ασκησης 3.2 - για Παράθυρο Bartlett Το τριγωνικό παράθυρο προκύπτει από συνέλιξη δύο *τετραγωνικών* παραθύρων μήκους $k = L/2$. Αυτό συνεπάγεται, από σχετική ιδιότητα του Μετασχηματισμού Fourier, ότι στο πεδίο της συχνότητας θα έχουμε πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων Μετασχηματισμών Fourier των δύο τετραγωνικών παραθύρων. Από την Άσκηση 3.1 υπενθυμίζεται ότι το τετραγωνικό παράθυρο έχει μετασχηματισμό Fourier που δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{k-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}k)}{\sin(\frac{\omega}{2})}.$$

Επομένως το τριγωνικό παράθυρο στο πεδίο της συχνότητας ικανοποιεί

$$\Pi_{tr}(e^{j\omega}) = \left(e^{-j\frac{L/2-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{L}{2}\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2$$

με αποτέλεσμα

$$\mid \Pi_{tr}(e^{j\omega}) \mid = \left(\frac{\sin(\frac{L}{2}\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2 .$$

Το πλάτος του κύριου λοβού υπολογίζεται

$$\mid \Pi_{tr}(e^{0}) \mid = \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{\sin(\frac{L}{2}\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2 = \left(\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\frac{L}{2}\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2 = \frac{L^2}{4},$$

όπου πάλι χρησιμοποιήθηκε η γνωστή ιδιότητα ότι $\sin x \approx x$ για x κοντά στο μηδέν.

Επιλέγοντας στην περίπτωση αυτή $\omega_L = \frac{3\pi}{\frac{L}{2}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{L \to \infty} \frac{|\Pi_{tr}(e^{j\omega_L})|}{(\frac{L^2}{4})} &= \lim_{L \to \infty} \left(\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{L})} \right)^2 \frac{1}{\frac{L^2}{4}} \\
&= \lim_{L \to \infty} \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{\sin^2(\frac{3\pi}{L})\frac{L^2}{4}} = \lim_{L \to \infty} \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{(\frac{3\pi}{L})^2\frac{L^2}{4}} \\
&= \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{(\frac{3\pi}{2})^2} = \left(\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\frac{3\pi}{2}} \right)^2 = (0.212)^2 = 0.044.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως για το Παράθυρο Bartlett ο μέγιστος κυματισμός είναι πολύ μικρότερος, από αυτόν του Τετραγωνικού.

Λύση Άσκησης 4.2 α). $L = 2N$ και $x_n = x_{L-1-n}$ δηλαδή $x_0 = x_{L-1}, x_1 = x_{L-2}, x_2 - x_{L-3}\cdots$.
Εφαρμόζοντας Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + \sum_{l=\frac{L}{2}}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_{L-1-l} e^{-j\frac{2\pi}{L}k(L-1-l)} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l (e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + e^{-j\frac{2\pi}{L}k(L-1-l)}). \end{aligned}$$

Ο προηγούμενος τύπος εάν εφαρμοστεί για $k = \frac{L}{2}$ και $L = 2N$ καταλήγει

$$\begin{aligned} X_{\frac{L}{2}} &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l (e^{-j\frac{2\pi}{L}\frac{L}{2}l} + e^{-j\frac{2\pi}{L}\frac{L}{2}(L-1-l)}) \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l (e^{-jl\pi} + e^{-j\pi(L-1-l)}) = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l (e^{-jl\pi} - e^{jl\pi}) \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l (2j) \frac{-(e^{jl\pi} - e^{-jl\pi})}{(2j)}. \end{aligned}$$

με $e^{-j\pi(L-1)} = e^{-j\pi(2N-1)} = e^{j\pi} = -1$ και έχοντας στην τελευταία σχέση, πολλαπλασιάσει και διαιρέσει με $2j$. Οπότε τελικά

$$X_{\frac{L}{2}} = -\sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} 2j x_l \sin(l\pi) = 0,$$

αφού για κάθε ακέραιο l ισχύει ότι $\sin(l\pi) = 0$.

β). Επειδή $x_n = -x_{L-1-n}$ αντισυμμετρικά δείγματα

$$X_0 = \sum_{l=0}^{L-1} x_l = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} (x_l - x_{L-1-l}) = 0.$$

Λύση Άσκησης 4.3 α). Έστω $x_0, x_1, \cdots, x_{L-1}$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nk}.$$

Επομένως

$$X_{L-k} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}n(L-k)} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j\frac{2\pi}{L}nk} e^{-j\frac{2\pi}{L}nL} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j\frac{2\pi}{L}nk},$$

αφού $e^{-j2\pi n} = 1$. Εάν επομένως πάρουμε τον μιγαδικό συζυγή της προηγούμενης σχέσης καταλήγουμε

$$X_{L-k}^* = \sum_{n=0}^{L-1} x_n^* (e^{j\frac{2\pi}{L}nk})^* = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} = X_k$$

λόγω του ότι x_n είναι πραγματική ακολουθία. Απεδείχθη επομένως ότι εάν x_n είναι πραγματική ακολουθία τότε $X_k = X_{L-k}^*$. Για να δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή όταν $X_k = X_{L-k}^*$ τότε x_n είναι πραγματική ακολουθία, εργαζόμαστε ως εξής:

$$x_n = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk} \tag{1}$$

Αν αλλάξουμε μεταβλητές και καλέσουμε $l = L - k$

$$x_n = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_{L-l} e^{j\frac{2\pi}{L}n(L-l)} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_{L-l} e^{-j\frac{2\pi}{L}nl} e^{j\frac{2\pi}{L}nL}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το γεγονός $e^{j2\pi n} = 1$ και αντικαθιστώντας όπου l το k καταλήγουμε

$$x_n = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_{L-k} e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k^* e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} \tag{2}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε κάνει χρήση της υπόθεσης $X_{L-k}^* = X_k$. Προσθέτοντας τις (1) και (2)

$$\begin{aligned} 2x_n &= \sum_{k=0}^{L-1} (X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk} + X_k^* e^{-j\frac{2\pi}{L}nk}) \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} (X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}) + (X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk})^* \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} 2\mathrm{Re}\left\{ X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk} \right\} \end{aligned}$$

το οποίο αποτελεί πραγματική ακολουθία.

β). Το $X_0 = x_0 + x_1 + \cdots + x_{L-1}$ είναι πραγματικός αριθμός αφού είναι άθροισμα πραγματικών όρων.

γ). Για τον όρο $X_{\frac{L}{2}}$ έχουμε

$$X_{\frac{L}{2}} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}n(\frac{L}{2})} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\pi n} = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{L-1},$$

αφού $e^{-j\pi n} = (-1)^n$. Η τελευταία παράσταση είναι πραγματική.

Λύση Άσκησης 4.7 Έστω $x_0, x_1, \cdots, x_{L-1}$ η ακολουθία μήκους L και

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}lk}, \quad x_n = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}$$

ο ΔMF και ο ΑΔMF αντίστοιχα. Ο Μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας x_n ορίζεται $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-jn\omega}$. Αν αντικαταστήσουμε τα x_n από τον ΑΔMF προκύπτει

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{L-1}\left(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}\right) e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{L-1}\frac{1}{L}X_k e^{j(\frac{2\pi}{L}k-\omega)n} = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k \sum_{n=0}^{L-1} e^{j(\frac{2\pi}{L}k-\omega)n} \\ &= \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k \frac{1-e^{j(\frac{2\pi}{L}k-\omega)L}}{1-e^{j(\frac{2\pi}{L}k-\omega)}}, \end{aligned}$$

όπου το $\sum_{n=0}^{L-1} e^{j(\frac{2\pi}{L}k-\omega)n}$ είναι Γεωμετρική πρόοδος της μορφής $\sum_{n=0}^{L-1} a^n = \frac{1-a^L}{1-a}$. Επίσης $e^{jL(\frac{2\pi}{L}k-\omega)} = e^{j(2\pi k - L\omega)} = e^{j2\pi k}e^{-jL\omega} = e^{-jL\omega}$, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Για να αποδειχθεί ότι $\lim_{\omega\to 2\pi l/L} X(e^{j\omega}) = X_l$ εργαζόμαστε ως εξής

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} X_k \lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}k)}}.$$

Για $k \neq l$

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}k)}} = \frac{1-e^{-jL\frac{2\pi l}{L}}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{L}(l-k)}} = \frac{0}{1-e^{-j\frac{2\pi}{L}(l-k)}} = 0.$$

Για $k = l$

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}l)}} = \frac{1-e^{-jL\frac{2\pi}{L}l}}{1-e^{-j0}} = \frac{0}{0}$$

που είναι απροσδιόριστη μορφή. Εφαρμόζοντας κανόνα του Hospital στο προηγούμενο πηλίκο παίρνουμε

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}l)}} = \lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{jLe^{-jL\omega}}{je^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}l)}} = \frac{Le^{-jL\frac{2\pi l}{L}}}{e^{-j0}} = L$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L})}} = L\delta_{k-l}.$$

Άρα

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} X_k \lim_{\omega\to\frac{2\pi l}{L}} \frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{L}k)}} = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k(L\delta_{k-l}) = X_l.$$

-

Λύση Άσκησης 5.5: Οι απαιτήσεις του προβλήματος σε σφάλματα είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} \frac{|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|}{|D(e^{j\omega})|} &\leq 0.01, \text{ για } |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| &\leq 0.01, \text{ για } |\omega| \geq \frac{1.2\pi}{4}. \end{aligned}$$

Από την εξίσωση (5.11) του βιβλίου έχουμε ότι

$$W(\omega)|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \leq \delta_{\max}$$

επομένως, συγκρίνοντας με τις παραπάνω σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{|D(e^{j\omega})|} = \frac{1}{|\omega|} & \text{για } |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{για } |\omega| \geq \frac{1.2\pi}{4}, \end{cases}$$

και τέλος $\delta_{\max} = 0.01$.

Το σχετικό σφάλμα στη ζώνη διάβασης εξασφαλίζει ότι στο σημείο $\omega = 0$ θα έχουμε μηδενικό απόλυτο σφάλμα, δηλαδή η $R(e^{j\omega})$, για $\omega = 0$ θα είναι ίση με μηδέν.

Εάν στη ζώνη αποκοπής η απαίτηση ήταν απόλυτο σφάλμα ίσο π.χ. προς 0.001 τότε θα έπρεπε

$$\begin{aligned} \frac{|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|}{|D(e^{j\omega})|} &\leq 0.01, \text{ για } |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| &\leq 0.001, \text{ για } |\omega| \geq \frac{1.2\pi}{4}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση θα έπρεπε τότε να γραφεί

$$10|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \leq 0.01, \text{ για } |\omega| \geq \frac{1.2\pi}{4},$$

ώστε να εξισωθούν τα μέγιστα αποδεκτά σφάλματα και στις δύο ζώνες. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, επιλέγουμε για συνάρτηση βάρους την

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{|D(e^{j\omega})|} = \frac{1}{|\omega|} & \text{για } |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 10 & \text{για } |\omega| \geq \frac{1.2\pi}{4}, \end{cases}$$

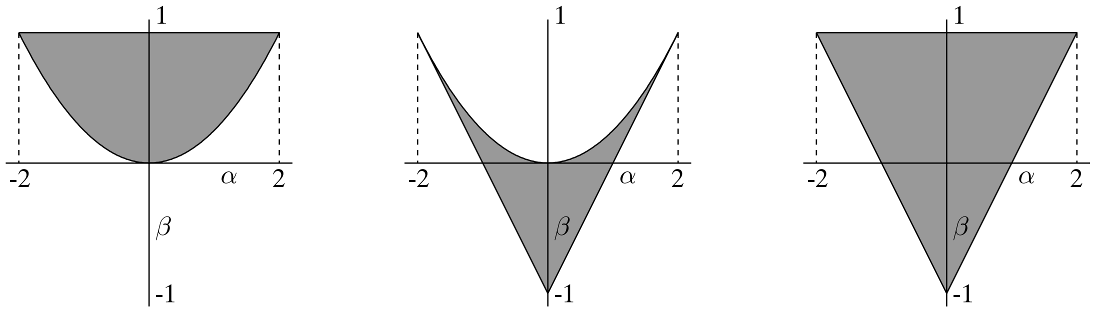
και σαν μέγιστο αποδεκτό σφάλμα πάλι το $\delta_{\max} = 0.01$.

Λύση Άσκησης 5.9(α): Το σύστημα για να είναι ευσταθές θα πρέπει οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι το $z^2 + \alpha z + \beta$ και η διακρίνουσα $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$\underline{\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0.}$ Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο μιγαδικές συζηγείς ρίζες z_1, z_2 με $z_2 = z_1^\star$. Λόγω τις τελευταίας ισότητας, μπορούμε να γράψουμε

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{|z_1|^2} = \sqrt{z_1 z_1^\star} = \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{\beta}.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη γνωστή σχέση μεταξύ γινομένου ριζών και συντελεστών πολυωνύμου. Αφού επιθυμούμε $|z_1|< 1$ και $|z_2|< 1$, συμπεραίνουμε ότι αρκεί $\sqrt{\beta}< 1$ ή $\beta< 1$. Επομένως η πρώτη περιοχή που εξασφαλίζει ευστάθεια είναι όλα τα σημεία (α,β) τα οποία ικανοποιούν τις δύο ανισότητες $\beta< 1$ και $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$. Η περιοχή αυτή των σημείων στο επίπεδο (α,β) παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένη στο Σχήμα (α).



(α) (β) (γ)

$\Delta = \alpha^2 - 4\beta \geq 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο πραγματικές ρίζες $z_1 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})$ και $z_2 = \frac{1}{2}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})$. Επειδή $z_2 \leq z_1$ και επιθυμούμε οι ρίζες να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδος θα πρέπει $-1 \leq z_2 \leq z_1 \leq 1$, που ικανοποιείται όταν $-1 \leq z_2$ και $z_1 \leq 1$. Οι δύο αυτές σχέσεις είναι ισοδύναμες με

$$\begin{aligned} 2 &\geq \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \\ 2 &\geq -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \end{aligned}$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι

$$2 \geq |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \Rightarrow 2 - |\alpha| \geq \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}.$$

Επειδή όμως η τετραγωνική ρίζα είναι θετική ποσότητα, η τελευταία ανισότητα είναι δυνατή μόνο όταν $2 \geq |\alpha|$. Με δεδομένο τον εν λόγω περιορισμό, μπορούμε να υψώσουμε την τελευταία ανισότητα στο τετράγωνο και μετά από απλοποιήσεις καταλήγουμε στη σχέση $\beta \geq |\alpha| - 1$. Συμπεραίνουμε επομένως ότι τα σημεία (α,β) που ικανοποιούν συγχρόνως τις ανισότητες

$$\begin{aligned} \beta &\leq \frac{\alpha^2}{4} \\ 2 &\geq |\alpha| \\ \beta &\geq |\alpha| - 1 \end{aligned}$$

είναι ζευγάρια παραμέτρων που αντιστοιχούν σε ευσταθές σύστημα. Η περιοχή σημείων που ικανοποιεί τις ανισότητες αυτές παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένη στο Σχήμα (β). Εάν επομένως συνδυάσουμε όλα τα σημεία που εξασφαλίζουν ευστάθεια δηλαδή τα σημεία των Σχημάτων (α) και (β), τότε προκύπτει το *τρίγωνο ευστάθειας* που παρουσιάζεται στο Σχήμα (γ).

Λύση Άσκησης 7.1 Κατ' αρχήν έχουμε την εξίσωση

$$W(\Omega_p)(1- \mid H(j\Omega_p) \mid) = W(\Omega_s) \mid H(j\Omega_s) \mid$$

η οποία γράφεται αναλυτικά

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}} = 10\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^4}}. \tag{1}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο την προηγούμενη σχέση καταλήγουμε

$$1 - 2\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}} + \frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} = 100\frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}$$

στην οποία εναλλάσσοντας όρους, μετά από ύψωση στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\left(1 + \frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} - 100\frac{1}{1+(\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^4}\right)^2 = 4\frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} - 100\frac{1}{1+(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})^4(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}\right)^2 = 4\frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}.$$

Καλώντας $x = (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4$, και από την εκφώνηση έχουμε ότι $(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})^4 = 2^4 = 16$, η προηγούμενη σχέση μετά από απαλοιφή παρονομαστών γράφεται

$$256x^4 - 3168x^3 + 201x^2 + 13000x + 9600 = 0$$

που είναι αλγεβρική εξίσωση 4ου βαθμού. Επιλύοντάς την (π.χ. αριθμητικά) επιλέγουμε *μόνο* τις θετικές ρίζες, αφού η ποσότητα x όπως την ορίσαμε μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές. Η εξίσωση έχει δύο θετικές ρίζες τις 11.9303 και 2.6239 από όπου συμπεραίνουμε ότι πιθανές τιμές για το λόγο $\frac{\Omega_p}{\Omega_c}$ είναι $\sqrt[4]{11.9303} = 1.8585$ ή $\sqrt[4]{2.6239} = 1.2727$. Η μεν πρώτη περίπτωση καταλήγει σε $\Omega_c = \frac{\Omega_p}{1.8585} = \frac{1}{1.8585} = 0.5381$ ενώ η δεύτερη σε $\Omega_c = \frac{\Omega_p}{1.2727} = \frac{1}{1.2727} = 0.7857$. Βέβαια πρέπει να παρατηρήσουμε ότι λόγω των υψώσεων στο τετράγωνο (δύο φορές) οι ρίζες του πολυωνύμου δεν είναι υποχρεωτικά και λύσεις της Εξίσωσης (1), το αντίστροφο βέβαια ισχύει πάντοτε, δηλαδή οι λύσεις της Εξίσωσης (1) εμπεριέχονται στις ρίζες του πολυωνύμου. Από τις δύο τιμές 0.5381, 0.7857 που υπολογίστηκαν πρέπει να διαπιστώσουμε ποια ικανοποιεί την Εξίσωση (1). Αντικαθιστώντας στην στην εξίσωση παρατηρούμε ότι η μόνο η τιμή $\Omega_c = 0.5381$ ικανοποιεί την ισότητα.

Λύση Άσκησης 7.6 Στην περίπτωση αυτή έχουμε $W(e^{j\omega}) = 1$. Μέσω του διγραμμικού Μετασχηματισμού η σχέση των ψηφιακών και αναλογικών συχνοτήτων, ως γνωστόν, είναι $\Omega = \tan(\frac{\omega}{2})$. Επομένως το διάστημα μετάβασης στον αναλογικό κόσμο έχει άκρα που ορίζονται $\Omega_p = \tan(\frac{\omega_p}{2}) = \tan 0.15\pi = 0.5095$ και $\Omega_s = \tan(\frac{\omega_s}{2}) = \tan 0.2\pi = 0.7265$.

Η Απόκριση πλάτους του φίλτρου είναι

$$\mid H(j\Omega) \mid = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^4}},$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς, από τις σημειώσεις, είναι

$$H_2(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + (\sqrt{2}\Omega_c)s + \Omega_c^2}.$$

Επομένως για να οριστεί το αναλογικό φίλτρο αρκεί να προσδιορίσουμε τη συχνότητα 3-db Ω_c. Αφού η συνάρτηση βάρους είναι ίση προς τη μονάδα, αρκεί να επιλέξουμε την Ω_c έτσι ώστε τα δύο σφάλματα στις συχνότητες Ω_p και Ω_s να είναι ίσα. Δηλαδή

$$(1- \mid H(j\Omega_p) \mid) = \mid H(j\Omega_s) \mid$$

ή ισοδύναμα

$$1 - \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^4}}. \tag{2}$$

Ακολουθώντας ακριβώς αντίστοιχα βήματα όπως και στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 1 - 2\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}} + \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} \\
&\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} - \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^4}\right)^2 = 4\frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} \\
&\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4} - \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_p})^4(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}\right)^2 = 4\frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4}.
\end{aligned}$$

Καλώντας πάλι $x = (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^4$ και απαλείφοντας παρονομαστές, η αλγεβρική εξίσωση που προκύπτει είναι

$$17.0908x^4 - 24.8046x^2 - 20.5364x - 3 = 0,$$

η οποία έχει μια θετική ρίζα την $x = 1.5220$. Από την τιμή αυτή έχουμε ότι $\frac{\Omega_p}{\Omega_c} = \sqrt[4]{x}$ και επομένως $\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[4]{x}} = 0.4587$. Μπορούμε όντως να διαπιστώσουμε ότι η τιμή αυτή ικανοποιεί επίσης και την Εξίσωση (2).

Από τη στιγμή που υπολογίστηκε η παράμετρος Ω_c μπορούμε να κάνουμε αντικατάσταση στη συνάρτηση $_2(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2+(\sqrt{2}\Omega_c)s+\Omega_c^2}$ με τη βοήθεια του διγραμμικού μετασχηματισμού $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, οπότε προκύπτει, μετά από πράξεις, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\frac{\Omega_c^2}{1+\sqrt{2}\Omega_c+\Omega_c^2}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + \frac{2(\Omega_c^2-1)}{1+\sqrt{2}\Omega_c+\Omega_c^2}z^{-1} + \frac{1-\sqrt{2}\Omega_c+\Omega_c^2}{1+\sqrt{2}\Omega_c+\Omega_c^2}z^{-2}}.$$

Η προηγούμενη σχέση είναι της μορφής

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

που υλοποιείται με ελάχιστο αριθμό στοιχείων μνήμης κάνοντας χρήση του βοηθητικού σήματος

$$V(z) = \frac{X(z)}{a(z)}$$

όπως ακριβώς περιγράφεται στις σημειώσεις.

Άσκηση Α1. Με τη βοήθεια τριγωνικού παραθύρου σχεδιάστε κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους 7 που να έχει συχνότητα αποκοπής $\omega_c = .3\pi$.

Λύση. Αφού πρόκειται για φίλτρο με γραμμική φάση έχουμε ότι οι συντελεστές του φίλτρου είναι συμμετρικοί της μορφής $h_3, h_2, h_1, h_0, h_1, h_2, h_3$.

Αν καλέσουμε $D(\omega)$ την ιδανική συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε τότε

$$D(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq .3\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν α_n είναι οι όροι της σειράς Fourier της συνάρτησης αυτής τότε

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(\omega)d\omega = 0.3 \\ \alpha_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(\omega)e^{-jn\omega}d\omega = \frac{\sin(0.3n\pi)}{n\pi} \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση που χαρακτηρίζει ένα τριγωνικό παράθυρο μήκους $2N+1$ είναι

$$w_n = 1 - \frac{|n|}{(N+1)}, \;\; n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

Επομένως το τριγωνικό παράθυρο μήκους 7 γράφεται $w_n = 1 - |n|/4, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι συντελεστές του φίλτρου γράφονται $h_n = w_n \alpha_n$, δηλαδή

$$h_0 = 0.3, \;\;\; h_n = \left(1 - \frac{n}{4}\right)\frac{\sin(0.3n\pi)}{n\pi}, \; n = 1, 2, 3$$

Αν αντικαταστήσουμε τότε έχουμε $h_0 = .3, \; h_1 = .1931, \; h_2 = 0.0757, \; h_3 = 0.0082$.

Άσκηση Α2. Με τη βοήθεια τετραγωνικού παραθύρου σχεδιάστε κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους $2N+1$ που να έχει περιοχή διάβασης το διάστημα $[0 \; 0.3\pi]$, περιοχή αποκοπής το $[0.4\pi \; \pi]$ και στην περιοχή μετάβασης $[0.3\pi \; 0.4\pi]$ μεταβάλλεται γραμμικά από την τιμή 1 στην τιμή 0.

Λύση. Η ιδανική συνάρτηση $D(\omega)$ που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε έχει τη μορφή

$$D(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq .3\pi \\ 4 - \frac{10}{\pi}|\omega| & .3\pi \leq |\omega| \leq .4\pi \\ 0 & 0.4\pi \leq |\omega| \end{cases}$$

Επειδή το παράθυρο είναι τετραγωνικό οι συντελεστές του φίλτρου είναι οι όροι της σειράς Fourier της συνάρτησης $D(\omega)$. Για να υπολογίσουμε τους όρους αυτούς ένας τρόπος είναι να εφαρμόσουμε τον τύπο της προηγούμενης άσκησης μέσω του γνωστού ολοκληρώματος. Υπάρχει όμως μια πολύ ευκολότερη μέθοδος που μάθαμε στο μάθημα της Εισαγωγής στη Θεωρία Γραμμικών Συστημάτων (Άσκηση Γ2, της σειράς Γ που υπάρχει στην αντίστοιχη σελίδα του μαθήματος) και την οποία θα εφαρμόσουμε.

Αν h_n καλέσουμε τους όρους της σειράς Fourier της $D(\omega)$ και α_n της δεύτερης παραγώγου $D''(\omega)$ τότε ξέρουμε (από Γ2) ότι για $n \neq 0$ έχουμε

$$h_n = \frac{\alpha_n}{(-jn)^2} = -\frac{\alpha_n}{n^2}, \;\; n \neq 0$$

Αν ζωγραφίσουμε τη συνάρτηση $D(\omega)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$D''(\omega) = \frac{10}{\pi}\Big(\delta(\omega + .4\pi) - \delta(\omega + .3\pi) - \delta(\omega - .3\pi) + \delta(\omega - .4\pi)\Big)$$

Για τη συνάρτηση αυτή είναι εύκολο να υπολογίσουμε τους όρους της σειράς Fourier και έχουμε ότι

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D''(\omega)e^{-jn\omega}d\omega = \frac{10}{\pi^2}\{\cos(.4\pi n) - \cos(.3\pi n)\}$$

Επομένως για τους όρους h_n έχουμε για $n \neq 0$

$$h_n = -\frac{\alpha_n}{n^2} = \frac{10}{n^2\pi^2}\{\cos(.3\pi n) - \cos(.4\pi n)\}$$

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω τύπος για $n = 0$ είναι απροσδιόριστος. Όσον αφορά τώρα τον συντελεστή h_0 μπορούμε να τον υπολογίσουμε απ' ευθείας αφού πρόκειται για τη μέση τιμή της συνάρτησης $D(\omega)$. Δηλαδή (δι' επισκοπήσεως)

$$h_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(\omega)d\omega = 0.35$$

Το ζητούμενο φίλτρο έχει συντελεστές $h_n,\ n = 0, \pm1, \ldots, \pm N$.

Άσκηση Α3. Σχεδιάστε ένα κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους 3 που να έχει περιοχή διάβασης το διάστημα $[0\ 0.3\pi]$, περιοχή αποκοπής το $[0.4\pi\ \pi]$ και περιοχή μετάβασης το $[0.3\pi\ 0.4\pi]$ με τη μέθοδο των περιοχών αδιαφορίας.

Λύση. Η μέθοδος των περιοχών αδιαφορίας μοιάζει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, μόνο που στην ολοκλήρωση του σφάλματος λαμβάνονται υπόψη οι περιοχές διάβασης και αποκοπής και όχι η περιοχή μετάβασης. Καταρχήν έχουμε ότι η ιδανική συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι

$$D(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq .3\pi \\ 0 & 0.4\pi \leq |\omega| \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $[0.3\pi\ 0.4\pi]$ η συνάρτηση αυτή δεν είναι ορισμένη.

Το φίλτρο που θέλουμε να προσδιορίσουμε έχει συντελεστές h_1, h_0, h_1 και η απόκριση συχνότητας γίνεται

$$H(e^{j\omega}) = h_1 + h_0e^{-j\omega} + h_1e^{-2j\omega} = e^{-j\omega}\{h_0 + 2h_1\cos(\omega)\}$$

Όπως έχουμε εξηγήσει, ο πρώτος όρος είναι η γραμμική φάση ενώ με τον δεύτερο όρο $R(\omega) = \{h_0 + 2h_1\cos(\omega)\}$, που είναι πραγματικός, προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $D(\omega)$. Συγκεκριμένα αν καλέσουμε $\mathcal{E}(h_0, h_1)$ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα τότε

$$\mathcal{E}(h_0, h_1) = \int_{[0\ \ .3\pi]\cup[.4\pi\ \ \pi]} \Big[D(\omega) - R(\omega)\Big]^2 d\omega$$

Αν πάρουμε τις μερικές παραγώγους ως προς h_0, h_1, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, και τις εξισώσουμε με μηδέν τότε βρίσκουμε το ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} .3\pi &= h_0(.9\pi) + h_1 2\{\sin(.3\pi) - \sin(.4\pi)\} \\ \sin(.3\pi) &= h_0\{\sin(.3\pi) - \sin(.4\pi)\} + h_1\{.9\pi + .5[\sin(.6\pi) - \sin(.8\pi)]\} \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε και λύσουμε ως προς τους δύο αγνώστους βρίσκουμε $h_0 = 0.3621, h_1 = 0.2860$.

Άσκηση Α4. Σχεδιάστε ένα ισοκυματικό (min-max) κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους 3 που να έχει περιοχή διάβασης το διάστημα $[0\ 0.3\pi]$, περιοχή αποκοπής το $[0.4\pi\ \pi]$ και περιοχή μετάβασης το $[0.3\pi\ 0.4\pi]$.

Λύση. Στην άσκηση αυτή η ιδανική συνάρτηση $D(\omega)$ καθώς και η συνάρτηση $R(\omega) = h_0 + 2h_1\cos(\omega)$ με την οποία θα κάνουμε την προσεγγίσουμε είναι ίδιες με αυτές τις προηγούμενης άσκησης.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της min-max προσέγγισης θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Εναλλαγής. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό πρέπει να βρούμε τρεις συχνότητες $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ έτσι ώστε

$$
\begin{gathered}
D(\omega_1) - R(\omega_1) = -[D(\omega_2) - R(\omega_2)] = D(\omega_3) - R(\omega_3) \\
|D(\omega_i) - R(\omega_i)| = \max_\omega |D(\omega) - R(\omega)|, \quad i = 1, 2, 3
\end{gathered}
$$

Δηλαδή στα σημεία $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ εμφανίζει η συνάρτηση σφάλματος τιμές που είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσες αλλά που έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο, και η κοινή αυτή απόλυτη τιμή αποτελεί και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης.

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $R(\omega)$ είναι ίση προς $-2h_1\sin(\omega)$ το οποίο έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[0\ \pi]$, επομένως η συνάρτηση αυτή είναι μονότονη (και μάλιστα πρέπει να είναι φθίνουσα αφού θα πρέπει να πηγαίνει από τιμές κοντά στην μονάδα σε τιμές κοντά στο μηδέν). Για τον ίδιο λόγο είναι και η συνάρτηση σφάλματος $D(\omega) - R(\omega)$ μέσα στα δύο διαστήματα $[0\ .3\pi]$, $[.4\pi\ \pi]$ αύξουσα (αφού η $D(\omega)$ είναι σταθερή σε κάθε διάστημα). Συμπεραίνουμε επομένως ότι η συνάρτηση σφάλματος εμφανίζει ακρότατα στα άκρα των δύο διαστημάτων $[0\ .3\pi]$ και $[.4\pi\ \pi]$. Υποψήφια δηλαδή σημεία για τα ω_i είναι τα $0,\ .3\pi,\ .4\pi,\ \pi$.

Οι μόνες δυνατές τριάδες που θα μπορούσαν να ικανοποιήσουν τις δύο συνθήκες του Θεωρήματος Εναλλαγής είναι $(0, .3\pi, .4\pi)$ και $(.3\pi, .4\pi, \pi)$ όπου η μεν πρώτη μπορεί να εμφανίσει σφάλματα $(-\epsilon, \epsilon, -\epsilon)$ και η δεύτερη $(\epsilon, -\epsilon, \epsilon)$. Οι άλλες δύο επιλογές δηλαδή $(0, .3\pi, \pi)$ και $(0, .4\pi, \pi)$ λόγω μονοτονίας δεν μπορούν να ικανοποιήσουν την πρώτη συνθήκη της σωστής εναλλαγής προσήμου.

Η τριάδα $(0, .3\pi, .4\pi)$ δίνει τις εξισώσεις

$$
\begin{gathered}
1 - h_0 - 2h_1 = -\epsilon \\
1 - h_0 - 2h_1\cos(.3\pi) = \epsilon \\
-h_0 - 2h_1\cos(.4\pi) = -\epsilon
\end{gathered}
$$

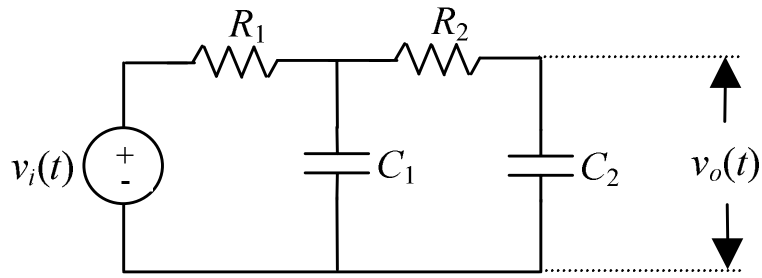
Αν λύσουμε το σύστημα βρίσκουμε $h_0 = -0.1489,\ h_1 = 0.7236,\ \epsilon = 0.2983$. Το δε σφάλμα στο σημείο π είναι $-h_0 + 2h_1 = 1.5961$ το οποίο όμως είναι μεγαλύτερο του ϵ που υπολογίσαμε, επομένως δεν ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος.

Η τριάδα $(.3\pi, .4\pi, \pi)$ δίνει τις εξισώσεις

$$
\begin{gathered}
1 - h_0 - 2h_1\cos(.3\pi) = \epsilon \\
-h_0 - 2h_1\cos(.4\pi) = -\epsilon \\
-h_0 + 2h_1 = \epsilon
\end{gathered}
$$

Αν λύσουμε το σύστημα βρίσκουμε $h_0 = 0.2176,\ h_1 = 0.3149,\ \epsilon = 0.4122$. Το δε σφάλμα στο σημείο 0 είναι $1 - h_0 - 2h_1 = 0.1526$ το οποίο είναι μικρότερο του ϵ που υπολογίσαμε, επομένως ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος και συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η λύση στο πρόβλημά μας.

Άσκηση Β1. Έστω το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος.



α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ εισόδου $v_i(t)$ και εξόδου $v_o(t)$.

β) Εξετάστε το κατά πόσο υπάρχει επιλογή των στοιχείων του κυκλώματος ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του α) ερωτήματος να υλοποιεί ένα αναλογικό φίλτρο Butterworth τάξης 2 με συχνότητα αποκοπής 1KHz.

Λύση. Αν περάσουμε στο πεδίο Laplace τότε οι ισοδύναμες αντιστάσεις των στοιχείων γίνονται $R_1, R_2, 1/sC_1, 1/sC_2$. Η μέθοδος βρόχων για την επίλυση του κυκλώματος καταλήγει στις εξισώσεις

$$\begin{gathered} -V_i + R_1 I_1 + \tfrac{1}{sC_1}(I_1 - I_2) = 0 \\ \tfrac{1}{sC_1}(I_2 - I_1) + \left(R_2 + \tfrac{1}{sC_2}\right) I_2 = 0 \end{gathered}$$

Λύνοντας τη δεύτερη ως προς I_1 και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση καταλήγουμε στη σχέση υπολογισμού του ρεύματος I_2. Παρατηρούμε όμως ότι $V_o(s) = I_2(s)\frac{1}{sC_2}$, οπότε για τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς έχουμε

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

Για το β) ερώτημα ας σχεδιάσουμε κατ' αρχάς ένα κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1$. Από τη θεωρία έχουμε ότι το φίλτρο Butterworth τάξης N γράφεται

$$H_B(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_0)(s - s_2)\cdots(s - s_{N-1})}$$

όπου $s_n = \Omega_c e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} + n\frac{\pi}{N})}$. Στην περίπτωσή μας $N = 2$, $\Omega_c = 1$, επομένως $s_0 = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + j)$, $s_1 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - j)$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι το φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1$ είναι

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$$

Για να βρούμε τώρα το φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1000$ εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $s \leftarrow s/1000$ και καταλήγουμε

$$H(s) = \frac{1}{s^2 10^{-6} + s\sqrt{2}10^{-3} + 1}$$

Οι εξισώσεις που καθορίζουν τις τιμές των στοιχείων είναι

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 10^{-6}, \quad R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 = \sqrt{2}10^{-3}$$

Αν καλέσετε $x = R_1C_1, y = R_2C_2$ τότε έχουμε ότι $xy = 10^{-6}$ επομένως το άθροισμα $x+y$ παίρνει τη μικρότερη του τιμή για $x = y = \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$, δηλαδή $x+y \geq 2\cdot 10^{-3}$ που σημαίνει ότι **η δεύτερη των εξισώσεων δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για καμία επιλογή των τιμών των στοιχείων!!!** αφού οι τιμές αυτές είναι όλες θετικές. Είναι μάλιστα εύκολο να διαπιστωθεί ότι το δυσάρεστο αυτό γεγονός ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή της συχνότητας αποκοπής Ω_c. Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατόν να υλοποιήσουμε φίλτρο Butterworth τάξης $N = 2$ με το ως άνω κύκλωμα, μπορούμε ευτυχώς να υλοποιήσουμε άλλα είδη φίλτρων (π.χ. Chebyshev) καθώς και άλλες τάξεις (επεκτείνοντας το κύκλωμα).

Άσκηση Γ1. Αναλύστε κατά πόσο το γραμμικό σύστημα

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{T} \tag{1}$$

προσεγγίζει τις χαρακτηριστικές του ιδανικού διαφοριστή.

Λύση. Όπως είδαμε στη θεωρία ο ιδανικός διαφοριστής έχει απόκριση συχνότητας που είναι ίση προς

$$D(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T}, \quad -\pi \le \omega \le \pi.$$

Το γραμμικό σύστημα που προτείνεται για προσέγγιση του διαφοριστή είναι FIR μήκους 2 και έχει συνάρτηση μεταφοράς που μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ στη Σχέση (1). Συγκεκριμένα

$$Y(z) = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T}.$$

με απόκριση συχνότητας

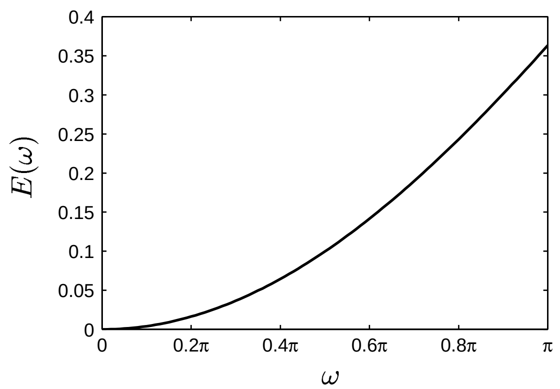
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{T} = e^{-j\omega/2}\frac{2j\sin\frac{\omega}{2}}{T}. \tag{2}$$

Το πρώτο συμπέρασμα που συνάγεται από την Εξίσωση (2) είναι ότι λόγω του όρου $e^{-j\omega/2}$ (που είναι γραμμική φάση) υπάρχει μια καθυστέριση της τάξεως του μισού δείγματος. Με άλλα λόγια αυτό που υπολογίζουμε με τη Σχέση (1) αντιστοιχεί στην παράγωγο της χρονικής στιγμής $(n-0.5)T$ και όχι της nT, στο μέσον δηλαδή των δύο στιγμών δειγματοληψίας $(n-1)T$ και nT όπου παίρνουμε τα δείγματα x_{n-1}, x_n.

Αν παραβλέψουμε τον όρο της γραμμικής φάσης τότε το σχετικό σφάλμα μεταξύ ιδανικού και προτεινόμενου διαφοριστή είναι

$$E(\omega) = \left|\frac{D(e^{j\omega}) - \frac{2j\sin\frac{\omega}{2}}{T}}{D(e^{j\omega})}\right| = \left|1 - \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right|$$

και την οποία αν σχεδιάσουμε σαν συνάρτηση του ω έχουμε το παρακάτω σχήμα



Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο σφάλμα εμφανίζεται στη συχνότητα $\omega = \pi$ και είναι της τάξεως του 35%.

Άσκηση Γ2. Έστω ότι θέλουμε να συνδυάσουμε τον ιδανικό διαφοριστή με ένα κατωπερατό φίλτρο συχνότητας αποκοπής ω_c.
α) Υπολογίστε τους βέλτιστους συντελεστές ενός FIR φίλτρου κατά την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (τετραγωνικό παράθυρο).
β) Βρείτε το βέλτιστο FIR φίλτρο για $\omega_c = 0.6\pi,\ T = 1$ και για μήκη $N = 7, 11, 21$.
γ) Βρείτε τα βέλτιστα FIR φίλτρα του ερωτήματος β) για παράθυρο Hamming.

Λύση. Οι ιδανικές προδιαγραφές που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι

$$I(\omega) = \begin{cases} j\dfrac{\omega}{T} & 0 \le \omega \le \omega_c \\ \\ 0 & \omega_c < \omega \le \pi \end{cases}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε, το φίλτρο που μας ενδιαφέρει είναι FIR γραμμικής φάσης του οποίου οι όροι της κρουστικής απόκρισης εμφανίζουν περιττή συμμετρία γύρω από τον κεντρικό όρο ο οποίος είναι ίσος προς μηδέν. Συγκεκριμένα αν $N = 2M + 1$ είναι το μήκος του φίλτρου τότε οι όροι της κρουστικής απόκρισης είναι

$$h_M\ h_{M-1}\ \cdots\ h_2\ h_1\ 0\ -h_1\ -h_2\ \cdots\ -h_{M-1}\ -h_M$$

το οποίο έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega}\left\{2h_1 \sin\omega + 2h_2 \sin 2\omega + \cdots + 2h_M \sin M\omega\right\}.$$

Ο όρος $e^{-jM\omega}$ αποτελεί γραμμική φάση και καθυστερεί την έξοδο κατά M χρονικές στιγμές, επομένως τον παραβλέπουμε. Θα πρέπει δηλαδή τη συνάρτηση $I(\omega)$ να την προσεγγίζουμε με τον γραμμικό συνδυασμό $j(2h_1 \sin\omega + 2h_2 \sin 2\omega + \cdots + 2h_M \sin M\omega)$.

Για να υπολογίσουμε τους βέλτιστους συντελεστές πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση

$$E(h_1, \ldots, h_M) = \int_0^\pi \left(\hat{I}(\omega) - 2h_1 \sin\omega - 2h_2 \sin 2\omega - \cdots - 2h_M \sin M\omega\right)^2 d\omega, \tag{3}$$

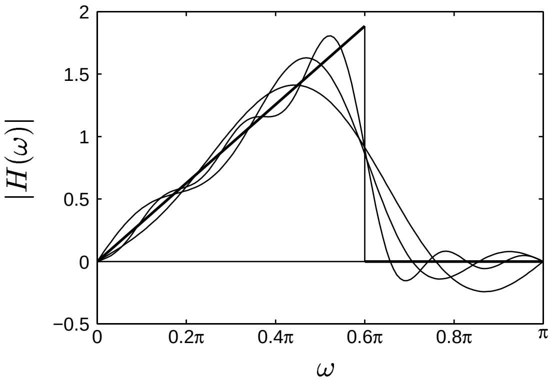
όπου

$$\hat{I}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{T} & 0 \le \omega \le \omega_c \\ \\ 0 & \omega_c < \omega \le \pi \end{cases}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς h_k την (3) και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με μηδέν βρίσκουμε ότι

$$h_k = \frac{\omega_c \cos\omega_c}{\pi T k} - \frac{\sin k\omega_c}{\pi T k^2},\quad k = 1, \ldots, M.$$

Για το β) ερώτημα δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε τις τιμές του $\omega_c = 0.6\pi$ καθώς και $M = 3, 5, 10$. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται οι αποκρίσεις συχνότητας των αντίστοιχων φίλτρων.

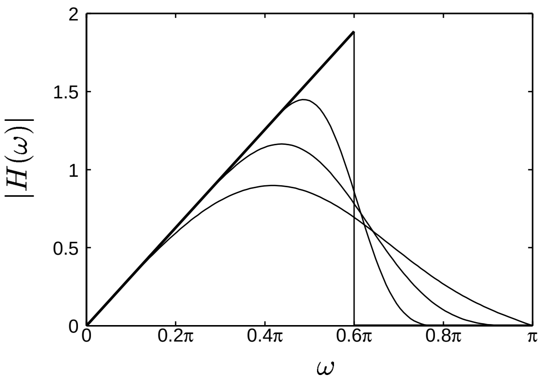


Παρατηρούμε τους έντονους κυματισμούς που είναι αποτέλεσμα του τετραγωνικού παραθύρου.

Για το γ) ερώτημα έχουμε ότι οι όροι των φίλτρων που υπολογίζουμε από το β) ερώτημα πρέπει να πολλαπλασιαστούν ένας προς έναν με τους αντίστοιχους όρους του παραθύρου Hamming. Το εν λόγω παράθυρο γράφεται

$$w_n = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{2M+1}\right), \quad k = 0, \ldots, M$$

και τα φίλτρα που προκύπτουν έχουν απόκριση συχνότητας που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Παρατηρούμε ότι ο κυματισμός στο παράθυρο Hamming είναι ελάχιστος αλλά από την άλλη πλευρά έχει αυξηθεί η περιοχή μετάβασης.

Άσκηση Γ3. Να μελετηθούν ως προς την απόδοσή τους οι εξής κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης:
α) Κανόνας του ορθογωνίου.
β) Κανόνας του τραπεζίου.
γ) Κανόνας του Simpson.

Λύση. Θυμίζουμε ότι η απόκριση συχνότητας του ιδανικού ολοκληρωτή δίνεται από τον τύπο

$$I(e^{j\omega}) = \frac{T}{j\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \tag{4}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του ορθογωνίου το σήμα $x_\alpha(t)$ προσεγγίζεται από μια συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $[(n-1)T \; nT]$ και ίση προς το δείγμα της χρονικής στιγμής nT, δηλαδή $x_n = x_\alpha(nT)$. Αν καλέσουμε y_{n-1} το ολοκλήρωμα της χρονικής στιγμής $(n-1)T$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$y_n = y_{n-1} + Tx_n.$$

Αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + TX(z)$$

από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

που αντιστοιχεί σε IIR σύστημα, και την απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{T}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega/2}\frac{T}{2j\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Ο όρος $e^{j\omega/2}$ είναι γραμμική φάση και "προβλέπει" την έξοδο κατά μισό δείγμα προς το μέλλον. Δηλαδή το y_n που υπολογίζουμε δεν αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή nT αλλά στη $(n + 0.5)T$. Αν παραβλέψουμε τον όρο αυτόν τότε με την υπόλοιπη συνάρτηση πρέπει να διαπιστώσουμε πόσο καλά προσεγγίζουμε τον ιδανικό ολοκληρωτή της εξίσωσης (4).

Αν σχηματίσουμε το σχετικό σφάλμα τότε έχουμε

$$E_1(\omega) = \left|\frac{\frac{T}{j\omega} - \frac{T}{2j\sin\frac{\omega}{2}}}{\frac{T}{j\omega}}\right| = \left|1 - \frac{\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}}\right|.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σχετικό σφάλμα για $\omega = 0$ είναι μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι ο κανόνας ολοκλήρωσης ολοκληρώνει δίχως σφάλμα σταθερές συναρτήσεις (μια ιδιότητα που επιθυμούμε προφανώς ιδιαίτερα για οποιοδήποτε κανόνα ολοκλήρωσης!). Στο σχήμα στο τέλος της λύσης παρατηρούμε τη μορφή του σχετικού σφάλματος. Το μέγιστο σφάλμα εμφανίζεται στη συχνότητα π και είναι 56%.

Για το β) ερώτημα, τον κανόνα του τραπεζίου, το σήμα προσεγγίζεται από ευθείες γραμμές που ενώνουν τα σημεία δειγματοληψίας. Πηγαίνοντας από τη χρονική στιγμή $(n-1)T$ στη nT εμφανίζεται ένα τραπέζιο εμβαδού $0.5T(x_n + x_{n-1})$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε ότι

$$y_n = y_{n-1} + 0.5T(x_n + x_{n-1}). \tag{5}$$

Αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ η συνάρτηση μεταφοράς που υπολογίζουμε είναι

$$H(z) = 0.5T\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

και η απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = 0.5T\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{j\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{T}{2j}\cot\frac{\omega}{2}.$$

Η πρώτη σημαντική παρατήρηση είναι ότι για τον κανόνα αυτόν δεν έχουμε καμία φάση (ούτε γραμμική ούτε μη γραμμική!). Με άλλα λόγια αυτό που υπολογίζουμε από την αναδρομή στην (5) είναι το ολοκλήρωμα (σωστότερα μια προσέγγιση του ολοκληρώματος) της χρονικής στιγμής nT.

Το σχετικό σφάλμα για τον δεύτερο κανόνα γίνεται

$$E_2(\omega) = \left|1 - 0.5\omega\cot\frac{\omega}{2}\right|,$$

μπορούμε μάλιστα να διαπιστώσουμε ότι το σχετικό σφάλμα για $\omega = 0$ είναι μηδέν. Στο τελευταίο σχήμα μπορούμε να επίσης να πάρουμε μια συνολική εικόνα της συμπεριφοράς του δεύτερου κανόνα ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι το σφάλμα του είναι μεγαλύτερο από του πρώτου κανόνα για κάθε συχνότητα. Μάλιστα για $\omega = \pi$ το σφάλμα είναι 100%.

Ο κανόνας του Simpson συσχετίζει το ολοκλήρωμα της χρονικής στιγμής nT με αυτό της χρονικής στιγμής $(n-2)T$. Πηγαίνοντας από το $(n-2)T$ στο nT μεσολαβούν τρία δείγματα τα x_{n-2}, x_{n-1} και x_n. Το σήμα $x_\alpha(t)$ στο διάστημα $[(n-2)T\ nT]$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που περνάει από τα σημεία δειγματοληψίας. Επειδή τα σημεία που το ορίζουν είναι τρία (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) το πολυώνυμο αυτό είναι μοναδικό. Αν ολοκληρώσουμε την πολυωνυμική προσέγγιση στο διάστημα $[(n-2)T\ nT]$ τότε το ολοκλήρωμα που υπολογίζουμε είναι $\frac{T}{3}(x_n + 4X_{n-1} + x_{n-2})$. Επομένως η αναδρομή του ολοκληρώματος είναι

$$y_n = y_{n-2} + \frac{T}{3}(x_n + 4X_{n-1} + x_{n-2}).$$

Εφαρμόζοντας $\mathcal{Z}$ βρίσκουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς της αναδρομής γίνεται

$$H(z) = \frac{T}{3}\frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

και η απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{T}{3}\frac{2 + \cos\omega}{j\sin\omega}.$$

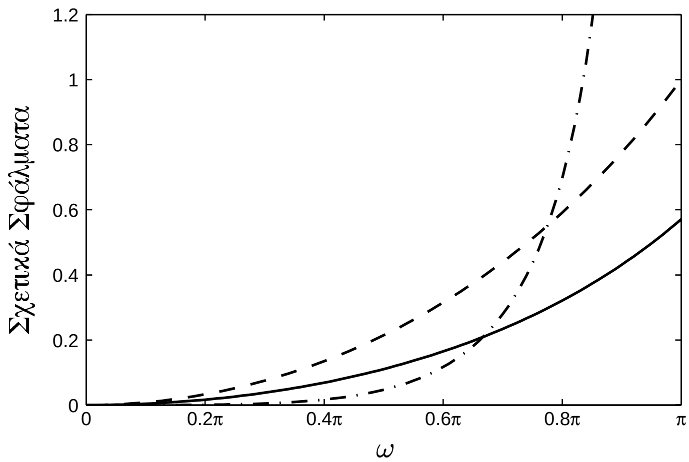
Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε κανενός είδους φάση. Επομένως το y_n που υπολογίζουμε με την αναδρομή αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή nT.

Το σχετικό σφάλμα γίνεται στην περίπτωση αυτή

$$E_3(\omega) = \left|1 - \frac{\omega}{\sin\omega}\frac{2 + \cos\omega}{3}\right|.$$

Παρατηρούμε δε ότι για $\omega = 0$ είναι μηδέν, άρα οι σταθερές συναρτήσεις ολοκληρώνονται σωστά. Παρατηρούμε επίσης ότι το σχετικό σφάλμα καθώς το $\omega \to \pi$ τείνει στο άπειρο. Δηλαδή για συχνότητες κοντά στην π το σφάλμα του κανόνα του Simpson είναι σημαντικό.

Αν εξετάσουμε τώρα τη συνολική συμπεριφορά του τελευταίου κανόνα για συχνότητες έως $\frac{\pi}{2}$ παρατηρούμε ότι το σχετικό σφάλμα είναι μικρό, μάλιστα σημαντικά μικρότερο των υπολοίπων δύο κανόνων. Ένας εύκολος τρόπος να εξασφαλίσουμε ότι οι συχνότητες του σήματος x_n θα βρίσκονται στην περιοχή $[0\ \frac{\pi}{2}]$, ώστε να ενδείκνυται η χρήση του κανόνα Simpson, είναι να δειγματοληπτήσουμε με διπλάσια συχνότητα το σήμα $x_\alpha(t)$ από ότι το όριο Nyquist.



$E_1(\omega)$ συνεχής, $E_2(\omega)$ διακεκομμένη, $E_3(\omega)$ διακεκομμένη-στικτή.