Στοχαστικά Σήματα & Εφαρμογές

Τυχαίες Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου

Διδάσκων: Ν. Παπανδρέου (Π.Δ. 407/80)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Τυχαίες Μεταβλητές: Ορισμοί

- Θεωρούμε το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος.
- Το πείραμα έχει δύο πιθανές εκβάσεις (αποτελέσματα):

$K =$ "κορόνα" $\qquad \Gamma =$ "γράμματα"

- Θεωρούμε ότι οι δύο εκβάσεις του πειράματος είναι ισοπίθανες, δηλαδή το νόμισμα μπορεί να δώσει K ή Γ με την ίδια πιθανότητα.

- Έστω ότι καταμετρούμε τα συνεχή αποτελέσματα ρίψης του νομίσματος. Για παράδειγμα, ρίχνουμε το νόμισμα N φορές, και έστω ότι μετράμε N_K φορές κορόνα και N_Γ φορές γράμματα.

Για μεγάλο αριθμό N αναμένουμε: $\dfrac{N_K}{N} \approx 0.5$ και $\dfrac{N_\Gamma}{N} \approx 0.5$

Πιθανότητα εμφάνισης K ή Γ: $\Pr\{K\} = 0.5$ και $\Pr\{\Gamma\} = 0.5$

Τυχαίες Μεταβλητές: Ορισμοί

- Ονομάζουμε το σύνολο όλων των πειραματικών αποτελεσμάτων ως δειγματικό χώρο (sample space) και συμβολίζουμε Ω:

$$\Omega = \{K, \Gamma\} \qquad \text{και} \qquad \Pr\{\Omega\} = 1$$

- Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο (event) και το συμβολίζουμε ως ω. Ένα υποσύνολο που περιλαμβάνει μόνο ένα στοιχείο ονομάζεται στοιχειώδες ενδεχόμενο (elementary event). Ο δειγματικός χώρος καλείται και βέβαιο ενδεχόμενο.

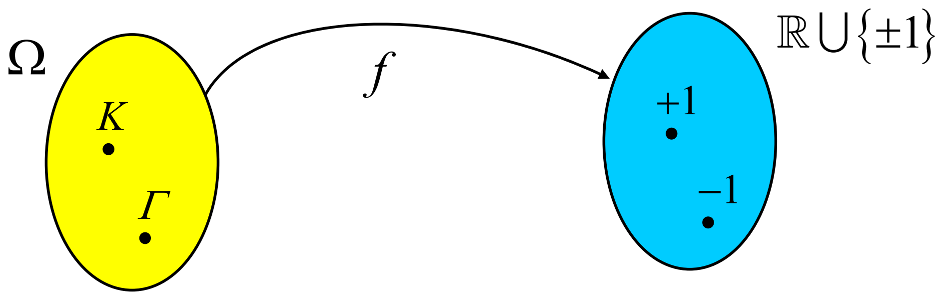
$$\omega_1 = \{K\} \qquad \text{και} \qquad \omega_2 = \{\Gamma\}$$

- Εάν ένας δειγματικός χώρος αποτελείται από n στοιχεία, τότε το πλήθος των υποσυνόλων είναι 2^n:

$$\{\varnothing\}, \{K\}, \{\Gamma\}, \{K, \Gamma\}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Ορισμοί

- Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή x ως εξής: όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι K, θέτουμε $x = +1$, ενώ όταν είναι Γ, θέτουμε $x = -1$.



- Δηλαδή, ορίσαμε μια αντιστοίχηση (συνάρτηση) των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω και ενός υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

$$x = f(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{αν } \omega = \{K\} \\ -1 & \text{αν } \omega = \{\Gamma\} \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} \Pr\{x = +1\} &= 0.5 \\ \Pr\{x = -1\} &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{επιπλέον} \quad \Pr\{x = \alpha\} = 0, \text{ όπου } \alpha \neq \pm 1, \quad \text{και} \quad \Pr\{x = \pm 1\} = 1$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Ορισμοί

- Άρα, για την τυχαία μεταβλητή x, έχουμε ως πεδίο ορισμού ένα δειγματικό χώρο, π.χ. $\Omega = \{K, \Gamma\}$, και ως πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, π.χ. $\mathbb{R} \bigcup \{\pm 1\}$. Επειδή, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από διακριτά ενδεχόμενα $\omega_1 = \{x = +1\}$ και $\omega_2 = \{x = -1\}$, η τυχαία μεταβλητή x ονομάζεται διακριτή τυχαία μεταβλητή.

- Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο χαρακτηρισμός μιας τυχαίας μεταβλητής δίνεται στατιστικά μέσω της ανάθεσης πιθανοτήτων (νόμος πιθανότητας) στις τιμές της μεταβλητής. Δηλαδή, ο νόμος πιθανοτήτων είναι ένας κανόνας, ο οποίος αντιστοιχίζει έναν αριθμό (πιθανότητα) σε κάθε συμβάν.

- Ένας νόμος πιθανότητας πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:
  - $\Pr\{A\} \geq 0 \quad \forall A \in \Omega$
  - $\Pr\{\Omega\} = 1$
  - $\Pr\{A_1 \bigcup A_2\} = \Pr\{A_1\} + \Pr\{A_2\} \quad \forall A_1, A_2 : A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$

Τυχαίες Μεταβλητές: Ορισμοί

- Στην επεξεργασία σήματος, δεν ενδιαφερόμαστε να χαρακτηρίσουμε στατιστικά κάποια συμβάντα, αλλά κυρίως να περιγράψουμε με έναν πιθανοτικό τρόπο (συνάρτηση) μια τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή ενδιαφερόμαστε για έναν πιθανοτικό νόμο, ο οποίος εφαρμόζεται κατευθείαν στην τυχαία μεταβλητή και όχι στα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου.

- Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (probability distribution function):

$$\boxed{F_x(a) = \Pr\{x \leq a\}}$$

Για το παράδειγμα ρίψης νομίσματος:

$$F_x(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a < -1 \\ 0.5 & \text{αν } -1 \leq a < +1 \\ 1 & \text{αν } +1 \leq a \end{cases}$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function):

$$\boxed{f_x(a) = \frac{d}{da} F_x(a)} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f_x(a)da = \Pr\{x_1 < x \leq x_2\}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Μέσοι όροι

- Ονομάζουμε μέση (mean) ή αναμενόμενη (expected) τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής x που λαμβάνει μια τιμή a_k με πιθανότητα $\Pr\{x=a_k\}$ ως:

$$\boxed{E\{x\} = m_x = \sum_k a_k \Pr\{x=a_k\}} \;\Rightarrow\; \boxed{E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a f_x(a)\,da}$$

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $g(x)$ της τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$\boxed{E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) f_x(a)\,da}$$

- Ονομάζουμε μέση τετραγωνική τιμή (mean square value): $\boxed{E\{x^2\}}$

- Ονομάζουμε διασπορά (variance) της τυχαίας μεταβλητής x, ως τη μέση τετραγωνική τιμή της τυχαίας μεταβλητής $y = x - m_x$:

$$\boxed{\operatorname{var}(x) = \sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (a-m_x)^2 f_x(a)\,da}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Μέσοι όροι

- Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται τυπική απόκλιση (standard deviation): σ_x

- Για τον τελεστή $E\{\cdot\}$, ισχύει η ιδιότητας της γραμμικότητας:

$$\boxed{E\{ax+by\} = aE\{x\} + bE\{y\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(x) &= E\{(x-m_x)^2\} = E\{x^2 + m_x^2 - 2xm_x\} \\
&= E\{x^2\} + E\{m_x^2\} - E\{2xm_x\} \\
&= E\{x^2\} + m_x^2 - 2E\{x\}m_x \\
&= \underbrace{E\{x^2\}}_{\text{μέση τετραγωνική τιμή}} - m_x^2
\end{aligned}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Από κοινού κατανομές

- Όταν εμπλέκονται περισσότερες από μία μεταβλητές, τότε είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τις στατιστικές εξαρτήσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές x και y

- Ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint probability distribution function):

$$\boxed{F_{x,y}(a_x, a_y) = \Pr\left\{x \le a_x, y \le a_y\right\}}$$

- Ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint probability density function):

$$\boxed{f_{x,y}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2}{\partial a_x \partial a_y} F_{x,y}(a_x, a_y)}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Από κοινού μέσοι όροι

- Ορίζουμε τη συσχέτιση (correlation) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y:

$$\boxed{r_{xy} = E\left\{xy^*\right\}}$$

- Ορίζουμε τη συνδιασπορά (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y:

$$\boxed{c_{xy} = \operatorname{cov}(x, y) = E\left\{(x - m_x)(y - m_y)^*\right\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x, y) &= E\left\{(x - m_x)(y^* - m_y^*)\right\} \\
&= E\left\{xy^* - xm_y^* - y^* m_x + m_x m_y^*\right\} \\
&= E\left\{xy^*\right\} - E\left\{x\right\} m_y^* - \cancel{E\left\{y^*\right\} m_x} + \cancel{m_x m_y^*} \\
&= r_{xy} - m_x m_y^*
\end{aligned}$$

Αν m_x ή m_y είναι μηδέν, τότε η συνδιασπορά ισούται με τη συσχέτιση.

Τυχαίες Μεταβλητές: Από κοινού μέσοι όροι

- Ορίζουμε το συντελεστή συσχέτισης (correlation coefficient) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y:

$$\boxed{\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}} \quad \Rightarrow \quad |\rho_{xy}| \le 1$$

- Γενικά ορίζουμε τις ποσότητες:

Τάξη (order): $k+r$

Ροπές: $E\{x^k\}$ Από κοινού ροπές: $E\{x^k y^r\}$

Κεντρικές ροπές: $E\{(x-m_x)^k\}$ Κεντρικές ροπές: $E\{(x-m_x)^k (y-m_y)^r\}$

- Άρα, η μέση τιμή $E\{x\}$ είναι ροπή πρώτης τάξης, η μέση τετραγωνική τιμή $E\{x^2\}$ είναι ροπή δεύτερης τάξης, η διασπορά $E\{(x-m_x)^2\}$ είναι κεντρική ροπή δεύτερης τάξης, η συνδιασπορά $E\{(x-m_x)(y-m_y)^*\}$ είναι από κοινού κεντρική ροπή δεύτερης τάξης.

Τυχαίες Μεταβλητές: Ανεξαρτησία, συσχέτιση και ορθογωνιότητα

- Όταν η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής x δεν εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής y, τότε οι τυχαίες μεταβλητές x και y ονομάζονται στατιστικά ανεξάρτητες (statistically independent).

- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y είναι στατιστικά ανεξάρτητες αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι διαχωρίσιμη ως εξής:

$$\boxed{f_{x,y}(a,b) = f_x(a) f_y(b)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E\{xy^*\} = r_{xy} = E\{x\}E\{y^*\}}$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(x,y) = r_{xy} - E\{x\}E\{y^*\} = 0}$$

$$\boxed{\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0}$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση ονομάζονται ασυσχέτιστες (uncorrelated).

Τυχαίες Μεταβλητές: Ανεξαρτησία, συσχέτιση και ορθογωνιότητα

- Δύο τυχαίες μεταβλητής που είναι στατιστικά ανεξάρτητες είναι ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

- Για τις ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές ισχύει η ιδιότητα:

$$\boxed{\operatorname{var}(x+y)=\operatorname{var}(x)+\operatorname{var}(y)}$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y ονομάζονται ορθογώνιες (orthogonal) αν έχουν μηδενική συσχέτιση:

$$\boxed{r_{xy}=0}$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι ορθογώνιες δεν είναι απαραίτητα ασυσχέτιστες.
- Δυο ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές, όπου η μία τουλάχιστον έχει μηδενική μέση τιμή είναι και ορθογώνιες.

Τυχαίες Μεταβλητές: Gaussian

- Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται Gaussian ή κανονική (normal) τυχαία μεταβλητή όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\boxed{f_x(a)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

Η σ.π.π. ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε τις τιμές m_x, σ_x^2 και ρ_{xy} .

όπου m_x και σ_x^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά αντίστοιχα.

- Δύο τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές όταν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\boxed{f_{x,y}(a,b)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(a-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2\rho_{xy}\frac{(a-m_x)(b-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(b-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}}$$

όπου ρ_{xy} είναι ο συντελεστής συσχέτισης.

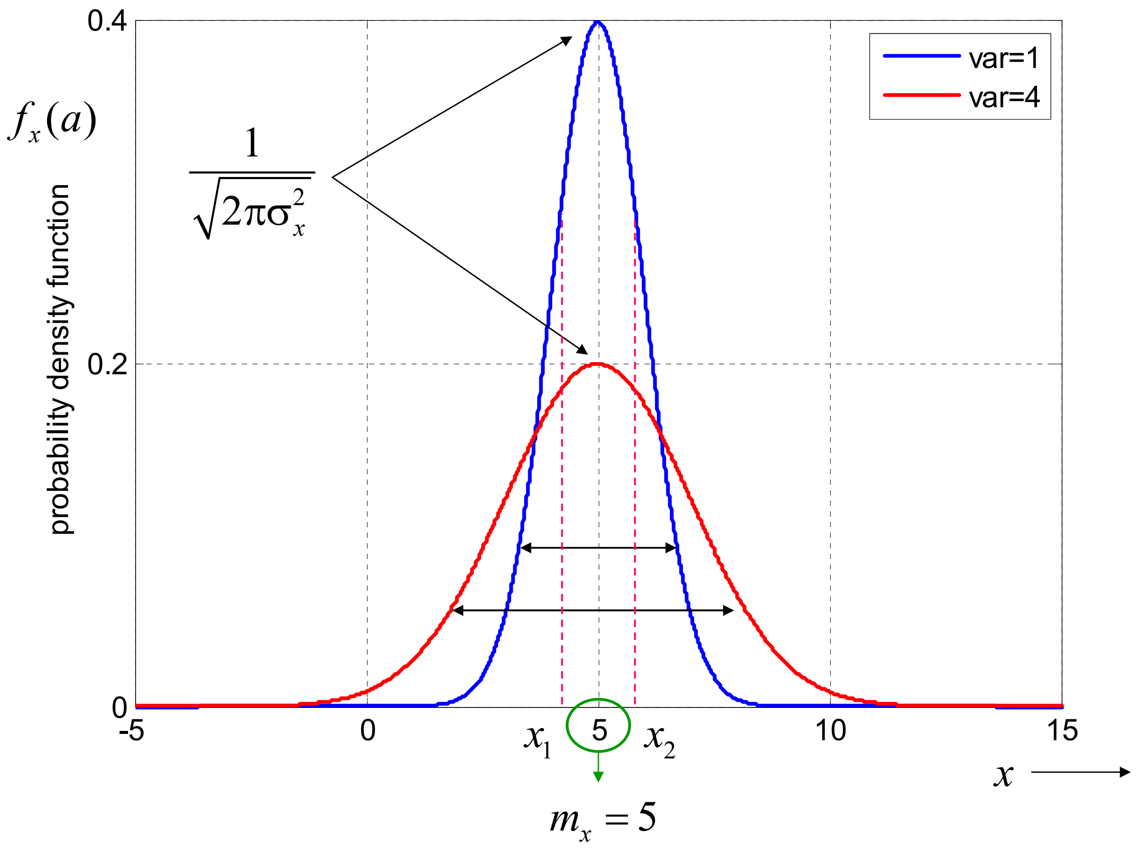
- Ιδιότητα: Αν x και y είναι από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε σταθερά a και b η τυχαία μεταβλητή $z = ax + by$ είναι Gaussian με μέση τιμή και διασπορά:

$$m_z = am_x + bm_y$$

$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy} \qquad \mathrm{cov}(x,y)$$

- Ιδιότητα: Αν δύο από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές x και y είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή $\rho_{xy} = 0$, τότε είναι και στατιστικά ανεξάρτητες, δηλαδή $f_{xy}(a,b) = f_x(a)f_y(b)$.

- Ιδιότητα: Αν x και y είναι από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, τότε ο βέλτιστος μη γραμμικός εκτιμητής για το y, δηλαδή $\hat{y} = g(x)$, ο οποίος ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $\xi = E\{(y-\hat{y})^2\}$ είναι ένας γραμμικός εκτιμητής: $\hat{y} = ax + b$.



- Στην επεξεργασία σήματος χρειάζεται συχνά να εκτιμήσουμε την τιμή μιας άγνωστης παραμέτρου ενός σήματος από ένα σύνολο παρατηρήσεων, τις οποίες χειριζόμαστε ως δείγματα μιας τυχαίας μεταβλητής. Εφόσον η εκτίμηση θα είναι τελικά μια συνάρτηση των παρατηρήσεων, η ίδια η εκτίμηση είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή. Επομένως, για την αξιολόγηση ενός εκτιμητή (συνάρτηση εκτίμησης), είναι σημαντικό να χαρακτηρίσουμε τις στατιστικές του ιδιότητες.
- Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή μιας παραμέτρου θ από μια ακολουθία τιμών (τυχαίες μεταβλητές) x_n για $n = 1,2,\ldots,N$. Συμβολίζουμε τον εκτιμητή της παραμέτρου ως $\hat{\theta}_N$. Γενικά, θέλουμε η εκτίμηση να είναι κατά μέσο όρο ίση με την πραγματική τιμή. Δηλαδή θέλουμε η τιμή $E\{\hat{\theta}_N\}$ να ισούται με θ.
- Ονομάζουμε τη διαφορά ανάμεσα στην πραγματική και τη μέση εκτιμώμενη τιμή ως στατιστική απόκλιση (bias) και συμβολίζουμε:

$$\boxed{B = \theta - \mathrm{E}\{\hat{\theta}_N\}}$$

- Αν η απόκλιση είναι μηδενική, δηλαδή $\mathrm{E}\{\hat{\theta}_N\} = \theta$, τότε ο εκτιμητής ονομάζεται αμερόληπτος (unbiased).
- Αν ο εκτιμητής $\hat{\theta}_N$ δεν είναι αμερόληπτος, όμως η απόκλιση τείνει στο μηδέν καθώς το πλήθος των παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο, τότε ο εκτιμητής ονομάζεται ασυμπτωτικά αμερόληπτος (asymptotically unbiased):

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{\theta}_N\} = \theta}$$

- Από μόνη της η ιδιότητα της αμεροληψίας ή ασυμπτωτικής αμεροληψίας ενός εκτιμητή, δεν εξασφαλίζει τη σύγκλιση της εκτίμησης στην πραγματική τιμή (την εξασφαλίζει μόνο κατά μέσο όρο). Δηλαδή, δεν εξασφαλίζει ότι η ακρίβεια της μέτρησης βελτιώνεται καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνει. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει η διασπορά της εκτίμησης να τείνει στο μηδέν, καθώς το πλήθος των παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\theta}_N) = \lim_{N\to\infty} E\{(\hat{\theta}_N - E\{\hat{\theta}_N\})^2\} = 0}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: Εκτίμηση παραμέτρων

- Για έναν αμερόληπτο εκτιμητή ισχύει η παρακάτω ανισότητα του Chebyshev:

$$\Pr\{|\hat{\theta}_N - \theta| < \varepsilon\} \leq \frac{\operatorname{var}(\hat{\theta}_N)}{\varepsilon^2}$$

- Δηλαδή, αν η διασπορά της εκτίμησης τείνει στο μηδέν για $N \to \infty$, τότε η ποσότητα στο δεύτερο μέρος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο μηδέν για οποιαδήποτε τιμή $\varepsilon \neq 0$, και συνεπώς, η πιθανότητα να διαφέρει η εκτίμηση $\hat{\theta}_N$ περισσότερο από ε από την πραγματική τιμή τείνει επίσης στο μηδέν.

- Ένας εκτιμητής ονομάζεται συνεπής (consistent) αν είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος, δηλαδή $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{\theta}_N\} = \theta$, και η διασπορά τείνει στο μηδέν καθώς το N τείνει στο άπειρο, δηλαδή $\lim_{N\to\infty} \operatorname{var}(\hat{\theta}_N) = 0$.

Τυχαίες Μεταβλητές: Εκτίμηση παραμέτρων

Παράδειγμα: Εκτιμητής μέσης τιμής (sample mean)

- Έστω η τυχαία μεταβλητή x με μέση τιμή m_x και διασπορά σ_x^2. Θεωρούμε ένα σύνολο από N παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής x, τις οποίες θεωρούμε ασυσχέτιστες. Συμβολίζουμε τις παρατηρήσεις x_n.

- Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο εκτιμητή για τη μέση τιμή: $\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$

- Υπολογίζουμε τη μέση τιμή του εκτιμητή:

$$E\{\hat{m}_x\} = E\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E\{x_n\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_x = m_x$$

Ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος.

Τυχαίες Μεταβλητές: Εκτίμηση παραμέτρων

- Υπολογίζουμε τη διασπορά του εκτιμητή:

$$\operatorname{var}(\hat{m}_x) = E\{(\hat{m}_x - E\{\hat{m}_x\})^2\} = E\{(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n - m_x)^2\}$$

$$= E\{\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_n x_m - 2m_x \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n + m_x^2\}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} E\{x_n x_m\} - 2m_x \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E\{x_n\} + m_x^2$$

$$= \frac{1}{N^2}[\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1, m\neq n}^{N} \underbrace{E\{x_n x_m\}}_{\text{uncorrelated}} + \sum_{n=1}^{N} E\{x_n^2\}] - 2m_x^2 + m_x^2$$

$$= \frac{1}{N^2}[(N^2 - N)m_x^2 + NE\{x_n^2\}] - m_x^2 = \frac{NE\{x_n^2\} - Nm_x^2}{N^2}$$

$$= \frac{E\{x_n^2\} - m_x^2}{N} = \frac{\sigma_x^2}{N} \rightarrow \lim_{N\to\infty} \operatorname{var}(\hat{m}_x) = 0$$

Ο εκτιμητής είναι συνεπής.

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

- Ορίζουμε ως τυχαία διαδικασία (random process) ή στοχαστική διαδικασία (stochastic process) ή τυχαίο σήμα (random signal) μια συλλογή από σήματα, δηλαδή συναρτήσεις στο χρόνο, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος.

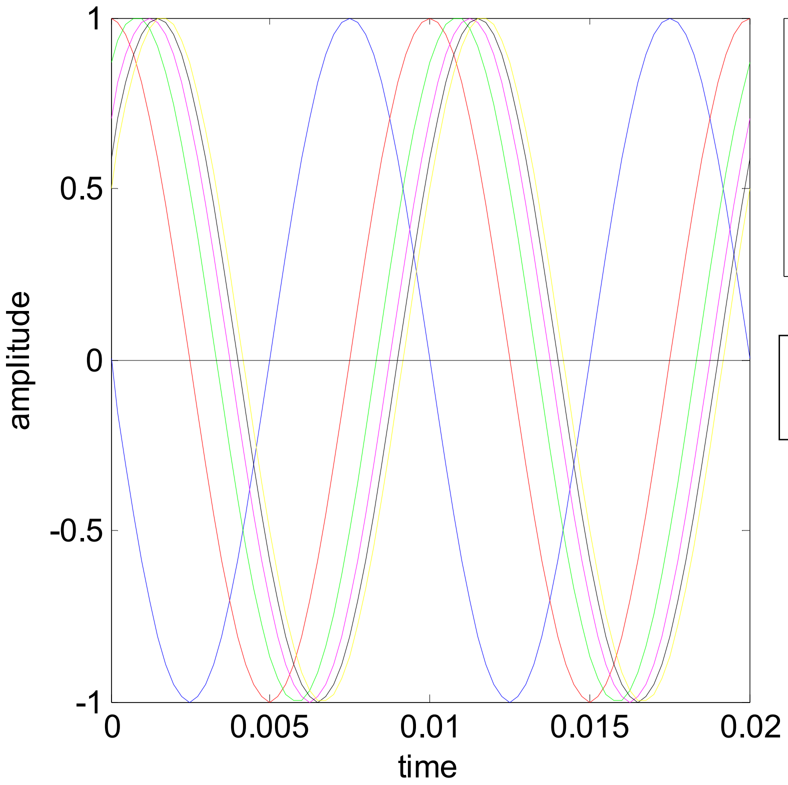
- Δηλαδή, δοθέντος ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{M}$, σε κάθε συμβάν ω_i αντιστοιχεί ένα σήμα $x(t;\omega_i)$ το οποίο έχει πιθανότητα $\Pr\{\omega_i\}$.

Παράδειγμα :

Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός ζαριού. Η έκβαση του πειράματος είναι ο αριθμός του ζαριού, συνεπώς $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Θεωρούμε όλα τα αποτελέσματα ισοπίθανα, δηλαδή $\Pr\{\omega = i\} = 1/6$ για κάθε i = 1,2,3,4,5,6. Ορίζουμε την τυχαία διαδικασία:

$$x(t;\omega_i) = A\sin(2\pi f_c t + \phi_i) \quad \text{όπου} \quad \phi_i = \frac{\pi}{\omega_i} \rightarrow \Pr\{\phi_i = \frac{\pi}{\omega_i}\} = \frac{1}{6} \ \forall i$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί



$$x(t;\omega_i) = A\sin(2\pi f_c t + \phi_i)$$

$A = 1;$ % amplitude (Volt)

$f_c = 100;$ % frequency (Hz)

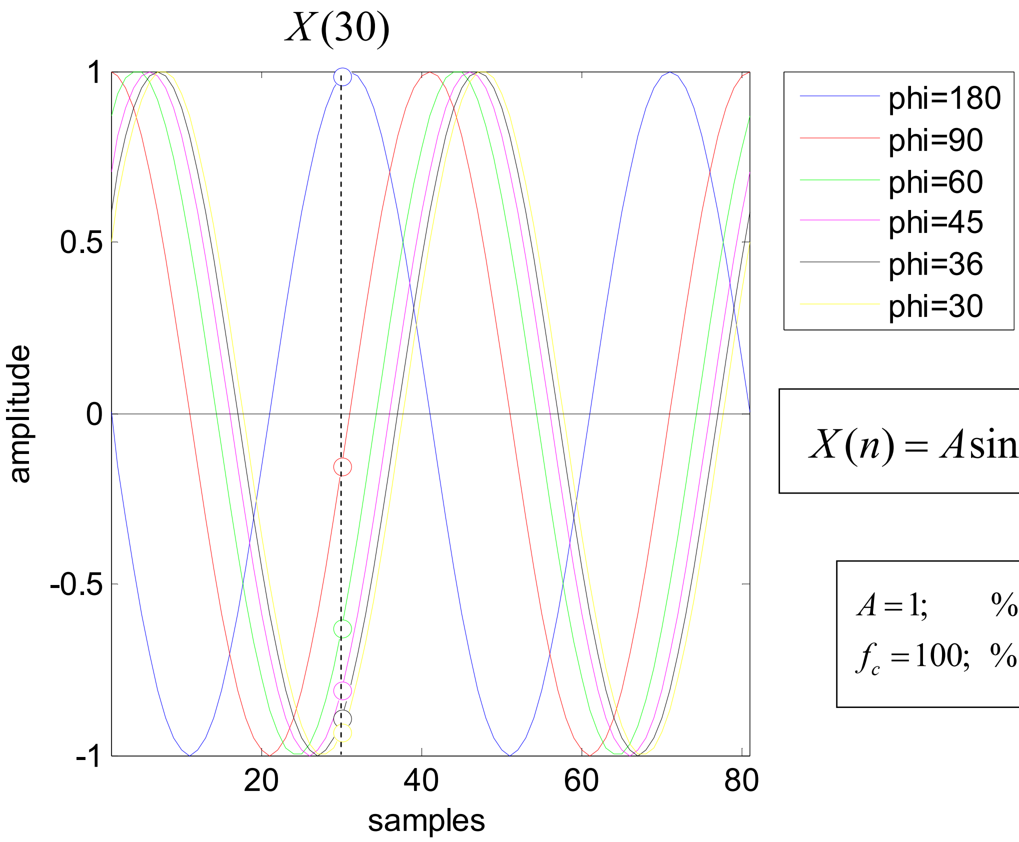
Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

- Κάθε μια από τις συναρτήσεις $x(t;\omega_i)$ ονομάζεται συνάρτηση δείγμα (sample function) ή πραγματοποίηση (realization) της τυχαίας διαδικασίας.

- Για κάθε χρονική στιγμή t_0 , έχουμε N διαφορετικές πιθανές τιμές $x(t_0;\omega_i)$. Οι τιμές αυτές συμβολίζονται γενικά $x(t_0)$ και αποτελούν στην ουσία μια τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή μιας τυχαίας διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή.

- Άρα, μια τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές., $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \ldots\}$, και γενικά γράφουμε $\{x(t), t \in D\}$. Όταν αναφερόμαστε σε τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου το σύνολο D ταυτίζεται με το σύνολο των ακεραίων και γράφουμε $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί



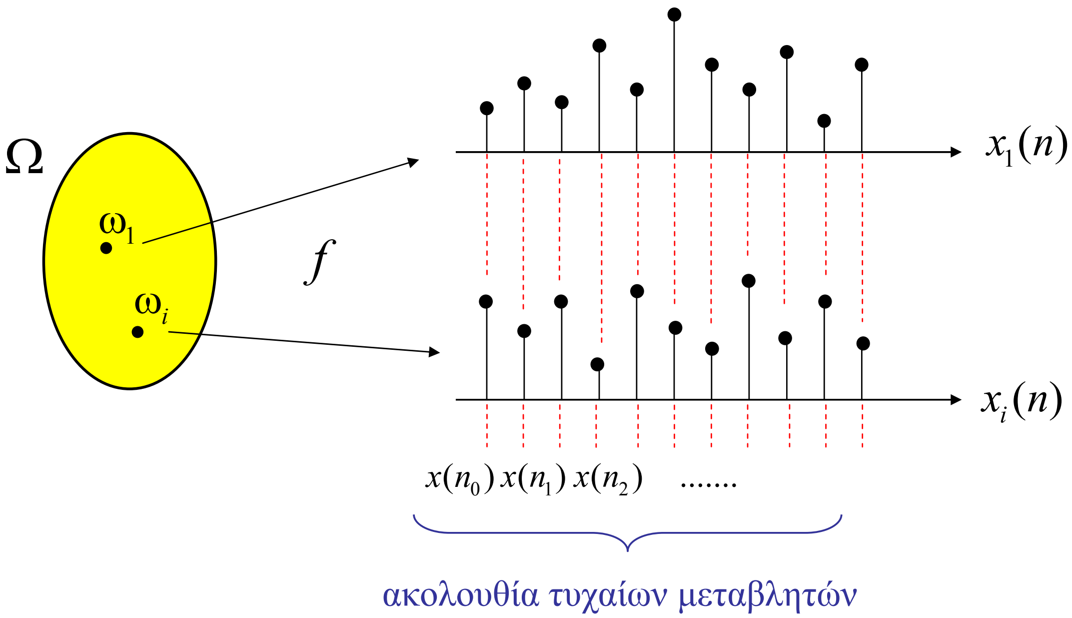
$$X(n) = A\sin(2\pi f_c n T_s + \phi)$$

$A = 1;$ % amplitude (Volt)

$f_c = 100;$ % frequency (Hz)

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

- Συνεπώς, μια διακριτή τυχαία διαδικασία είναι μια αντιστοίχηση των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου (εκβάσεις ενός πειράματος) σε μια συλλογή από σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες διακριτών τυχαίων μεταβλητών).



Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

- Σε κάθε τυχαία μεταβλητή της ακολουθίας αντιστοιχεί μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας και μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\boxed{F_{x(n)}(a) = \Pr\{x(n) \le a\}} \qquad \boxed{f_{x(n)}(a) = \frac{d}{da} F_{x(n)}(a)}$$

- Για να χαρακτηρίσουμε πλήρως την τυχαία διαδικασία χρειαζόμαστε την από κοινού συνάρτηση κατανομής (ή πυκνότητας) πιθανότητας:

$$\boxed{F_{x(n_0),x(n_1),\ldots,x(n_N)}(a_0, a_1, \ldots, a_N) = \Pr\{x(n_0) \le a_0, x(n_1) \le a_1, \ldots, x(n_N) \le a_N\}}$$

Μας δίνει πληροφορία για το πως οι τυχαίες μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους.

Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων

- Ορίσαμε την τυχαία διαδικασία ως μια αριθμημένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Συνεπώς, για κάθε n μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $x(n)$.

- Ορίζουμε ως μέσο όρο της τυχαίας διαδικασίας την ντετερμινιστική ακολουθία:

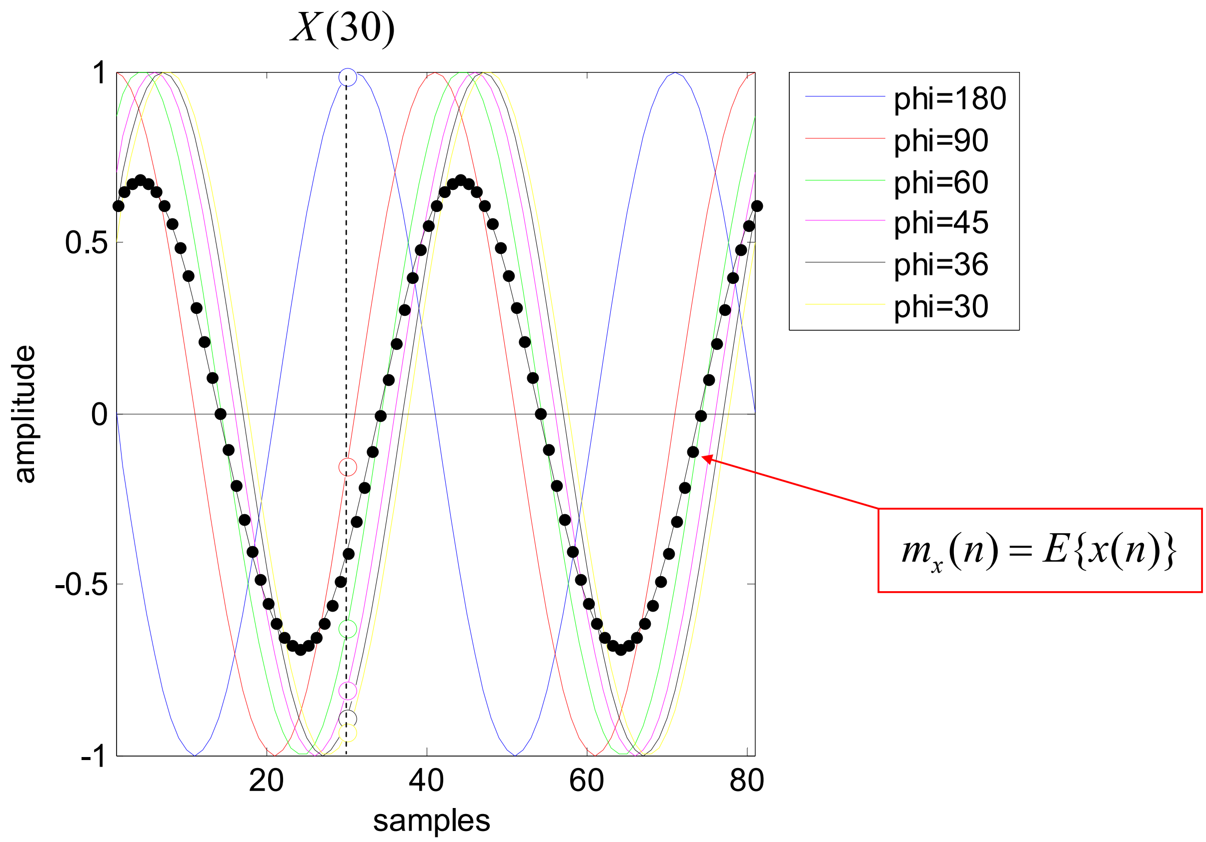
$$\boxed{m_x(n) = E\{x(n)\}}$$

- Ορίζουμε ως διασπορά της τυχαίας διαδικασίας την ντετερμινιστική ακολουθία:

$$\boxed{\sigma_x^2(n) = E\{[x(n) - m_x(n)]^2\}}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά εξαρτώνται από το n.

Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων



Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων

- Ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$\boxed{r_x(k,l) = E\{x(k)x^*(l)\}}$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς (autocovariance) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$\boxed{c_x(k,l) = E\{[x(k) - m_x(k)][x(l) - m_x(l)]^*\}}$$

Αν $m_x(n) = 0$, τότε η αυτοσυνδιασπορά ισούται με την αυτοσυσχέτιση.

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} c_x(k,l) &= E\{[x(k) - \mu_x(k)][x^*(l) - \mu_x^*(l)]\} \\ &= E\{x(k)x^*(l) - x(k)m_x^*(l) - m_x(k)x^*(l) + m_x(k)m_x^*(l)\} \\ &= E\{x(k)x^*(l)\} - E\{x(k)\}m_x^*(l) - m_x(k)\cancel{E\{x^*(l)\}} + \cancel{m_x(k)m_x^*(l)} \\ &= r_x(k,l) - m_x(k)m_x^*(l) \end{aligned}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων

- Ορίζουμε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation) μεταξύ δύο τυχαίων διαδικασιών $x(n)$ και $y(n)$:

$$\boxed{r_{xy}(k,l) = E\{x(k)y^*(l)\}}$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση ετεροσυνδιασποράς (cross-covariance) μεταξύ δύο τυχαίων διαδικασιών $x(n)$ και $y(n)$:

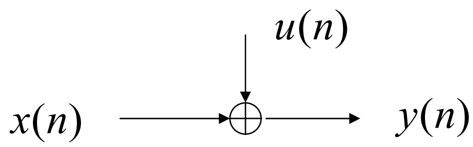
$$\boxed{c_{xy}(k,l) = E\{[x(k)-m_x(k)][y(l)-m_y(l)]^*\}} \quad \boxed{= r_{xy}(k,l) - m_x(k)m_y^*(l)}$$

- Όταν $c_{xy}(k,l)=0$, δηλαδή $r_{xy}(k,l) = m_x(k)m_y^*(l)$ για κάθε k και l, τότε οι δύο τυχαίες διαδικασίες ονομάζονται ασυσχέτιστες (uncorrelated).

- Όταν $r_{xy}(k,l)=0$ για κάθε k και l, τότε οι δύο τυχαίες διαδικασίες ονομάζονται ορθογώνιες (orthogonal).

Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων

Παράδειγμα :



- Θεωρούμε το σήμα $x(n)$ το οποίο παραμορφώνεται από προσθετικό θόρυβο $u(n)$. Γενικά, ο θόρυβος μοντελοποιείται ως μια τυχαία διαδικασία. Επίσης, θεωρούμε ότι ο θόρυβος έχει μηδενική μέση τιμή και ότι είναι ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου $x(n)$. Η έξοδος είναι $y(n) = x(n) + u(n)$.

$$r_y(k,l) = E\{y(k)y^*(l)\} = E\{[x(k)+u(k)][x(l)+u(l)]^*\}$$

$$= E\{[x(k)+u(k)][x^*(l)+u^*(l)]\}$$

$$= E\{x(k)x^*(l) + x(k)u^*(l) + u(k)x^*(l) + u(k)u^*(l)\}$$

$$= \underbrace{E\{x(k)x^*(l)\}}_{r_x(k,l)} + E\{\cancel{x(k)u^*(l)}\} + E\{\cancel{u(k)x^*(l)}\} + \underbrace{E\{u(k)u^*(l)\}}_{r_u(k,l)}$$

$$r_{xu}(k,l) = m_x(k)m_u^*(l) = 0$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Gaussian

- Έστω ένα διάνυσμα από N (πραγματικές) τυχαίες μεταβλητές: $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^{\mathrm{T}}$
- Το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ ονομάζεται Gaussian τυχαίο διάνυσμα και οι τυχαίες μεταβλητές x_n ονομάζονται από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\boxed{f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\boldsymbol{C}_x|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_x^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x)}}$$

όπου $\boldsymbol{m} = [m_1, m_2, \ldots, m_N]^{\mathrm{T}}$ είναι το διάνυσμα με στοιχεία τη μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών x_n, $\boldsymbol{C}_x$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας θετικά ορισμένος με στοιχεία τις τιμές συνδιασποράς μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών x_n, δηλαδή $c_{i,j} = E\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\}$ και $|\boldsymbol{C}_x|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα.

- Μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου ονομάζεται Gaussian, αν κάθε ακολουθία δειγμάτων $x(n)$ της τυχαίας διαδικασίας είναι από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές.

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Η έννοια της στασιμότητας μιας τυχαίας διαδικασίας συνδέεται με την έννοια της "στατιστικής χρονικής σταθερότητας", δηλαδή όταν οι στατιστικές ιδιότητες ή οι μέσοι όροι συνόλων της τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

- Όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{x(n)}(a)$ μιας τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή:

$$f_{x(n)}(a) = f_{x(n+k)}(a), \quad \forall k$$

τότε η διαδικασία ονομάζεται στάσιμη (stationary) διαδικασία πρώτης τάξης.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m_x(n) = m_x} \quad \text{και} \quad \boxed{\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Όταν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{x(n_1),x(n_2)}(a_1,a_2)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή:

$$f_{x(n_1),x(n_2)}(a_1,a_2) = f_{x(n_1+k),x(n_2+k)}(a_1,a_2), \quad \forall k$$

τότε η διαδικασία $x(n)$ ονομάζεται στάσιμη διαδικασία δεύτερης τάξης.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_x(k,l) = r_x(k+n,l+n) \Rightarrow E\{x(k)x^*(l)\} = E\{x(k+n)x^*(l+n)\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_x(k,l) = r_x(n,n-(k-l)) \equiv r_x(k-l)}$$

Δηλαδή, η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $k-l$, η οποία ονομάζεται lag.

- Αν μία διαδικασία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης, τότε είναι και πρώτης τάξης.

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{r_x(k,l) = r_x(k-l,0) \equiv r_x(k-l)}$$

$$\begin{aligned} r_x(k,l) &= r_x(k+n,l+n) \\ &= E\{x(k+n)x^*(l+n)\} \\ &= E\{x(n)x^*(n-(k-l))\} \\ &= r_x(k-l) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} c_x(k,l) &= r_x(k,l) - m_x(k)m_x^*(l) \\ &= r_x(k-l) - m_x(k)m_x^*(l) && \leftarrow \text{Η διαδικασία } x \text{ είναι στάσιμη 2ης τάξης.} \\ &= r_x(k-l) - m_x m_x^* && \leftarrow \text{Συνεπώς, είναι και στάσιμη 1ης τάξης.} \\ &\equiv c_x(k-l) && \leftarrow \text{Άρα και η συνδιασπορά εξαρτάται μόνο από το lag.} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} c_x(0) &= r_x(0) - m_x m_x^* = E\{x(n)x^*(n)\} - m_x m_x^* \\ &= E\{|x(n)|^2\} - |m_x|^2 = \sigma_x^2(n) \end{aligned}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Γενικά, ορίζουμε ότι μια διαδικασία είναι στάσιμη L τάξης όταν οι διαδικασίες $x(n)$ και $x(n+k)$ έχουν τις ίδιες από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας L τάξης.

- Μία διαδικασία που είναι στάσιμη για όλες τις τάξεις $L > 0$, ονομάζεται αυστηρά στάσιμη (stationary in the strict sense) .

Πολύ αυστηρή συνθήκη, που σπάνια συναντάται σε πρακτικά προβλήματα.

- Μία διαδικασία ονομάζεται στάσιμη υπό την ευρεία έννοια (WSS: wide sense stationary), αν ικανοποιούνται οι εξής τρεις συνθήκες:
  - Η μέση τιμή είναι μία σταθερά, ανεξάρτητη του χρόνου: $m_x(n) = m_x$
  - Η αυτοσυσχέτιση $r_x(k,l)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $k-l$.
  - Η διασπορά είναι πεπερασμένη: $c_x(0) < \infty$

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Παρατηρείστε ότι οι παραπάνω συνθήκες αφορούν στατιστικά πρώτης και δεύτερης τάξης μόνο.

- Για Gaussian τυχαίες διαδικασίες, η στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια είναι ισοδύναμη με την αυστηρή στασιμότητα.

- Δύο τυχαίες διαδικασίες x και y ονομάζονται από κοινού WSS αν κάθε μια είναι WSS και επιπλέον η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $r_{xy}(k,l)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $k-l$ δηλαδή:

$$\boxed{r_{xy}(k,l) = r_{xy}(k+n, l+n) \equiv r_{xy}(k-l)}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Στασιμότητα

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $r_x(k)$ μιας WSS διαδικασίας παρουσιάζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ιδιότητα 1: Συμμετρία $\boxed{r_x(k) = r_x^*(-k)}$

- Ιδιότητα 2: Μέση τετραγωνική τιμή $\boxed{r_x(0) = E\{|x(n)|^2\} \geq 0}$

- Ιδιότητα 3: Μέγιστη τιμή $\boxed{|r_x(k)| \leq r_x(0)}$

- Ιδιότητα 4: Περιοδικότητα

  > Αν ισχύει $r_x(k_0) = r_x(0)$ για κάποια τιμή k_0, τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με περίοδο k_0.

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Έστω ένα σύνολο από παρατηρήσεις της τυχαίας διαδικασίας x, δηλαδή έστω ότι λαμβάνουμε τις $p+1$ τιμές: $x(0), x(1),\ldots, x(p)$.

- Κατασκευάζουμε το διάνυσμα: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \ldots & x(p) \end{bmatrix}^T$

- Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα: $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(0) & x^*(1) & \ldots & x^*(p) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(0)x^*(0) & x(0)x^*(1) & \ldots & x(0)x^*(p) \\ x(1)x^*(0) & x(1)x^*(1) & \ldots & x(1)x^*(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(p)x^*(0) & x(p)x^*(1) & \ldots & x(p)x^*(p) \end{bmatrix}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Θεωρούμε ότι η τυχαία διαδικασία x είναι WSS:

$$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H\}=\begin{bmatrix} E\{x(0)x^*(0)\} & E\{x(0)x^*(1)\} & \dots & E\{x(0)x^*(p)\} \\ E\{x(1)x^*(0)\} & E\{x(1)x^*(1)\} & \dots & E\{x(1)x^*(p)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{x(p)x^*(0)\} & E\{x(p)x^*(1)\} & \dots & E\{x(p)x^*(p)\} \end{bmatrix}$$

$$E\{x(k)x^*(l)\}=r_x(k-l)$$

$$\Downarrow$$

$$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H\}=\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

$$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H\}=\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} r_x(n)=r_x^*(-n)\rightarrow \\ r_x(-n)=r_x^*(n) \end{matrix}}_{\text{Ιδιότητα Hermitian συμμετρίας}}$$

$$\Downarrow$$

$$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H\}=\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & r_x^*(2) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_x$$

- Ο πίνακας $\boldsymbol{R}_x$ ονομάζεται πίνακας αυτοσυσχέτισης (autocorrelation matrix).

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Ομοίως ορίζουμε τον πίνακα αυτοσυνδιασποράς (autocovariance matrix).

$$\boldsymbol{C}_x = E\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x)^H\} = \boldsymbol{R}_x - \boldsymbol{m}_x\boldsymbol{m}_x^H$$

όπου $\boldsymbol{m}_x$ είναι διάνυσμα $p+1$ θέσεων με στοιχεία τη μέση τιμή (σταθερά) της WSS διαδικασίας:

$$\boldsymbol{m}_x = \begin{bmatrix} m_x \\ m_x \\ \vdots \\ m_x \end{bmatrix}$$

- Όταν η διαδικασία έχει μηδενική μέση τιμή ισχύει: $\boxed{\boldsymbol{C}_x = \boldsymbol{R}_x}$

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ιδιότητα 1: Είναι Hermitian και Toeplitz.

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_x^H = \begin{bmatrix} (r_x(0))^* & (r_x(1))^* & \cdots & (r_x(p))^* \\ (r_x^*(1))^* & (r_x(0))^* & \cdots & (r_x(p-1))^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r_x^*(p))^* & (r_x^*(p-1))^* & \cdots & \underbrace{(r_x(0))^*}_{r_x(0)=r_x^*(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_x$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) & r_x^*(1) \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{R}_x = \mathrm{Toep}\left[r_x(0) \;\; r_x(1) \;\; \dots \;\; r_x(p)\right]$$

- Ιδιότητα 2: Είναι μη αρνητικά ορισμένος: $\boldsymbol{R}_x \geq 0$

- Ιδιότητα 3: Οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και μη αρνητικές: $\lambda_k \geq 0$

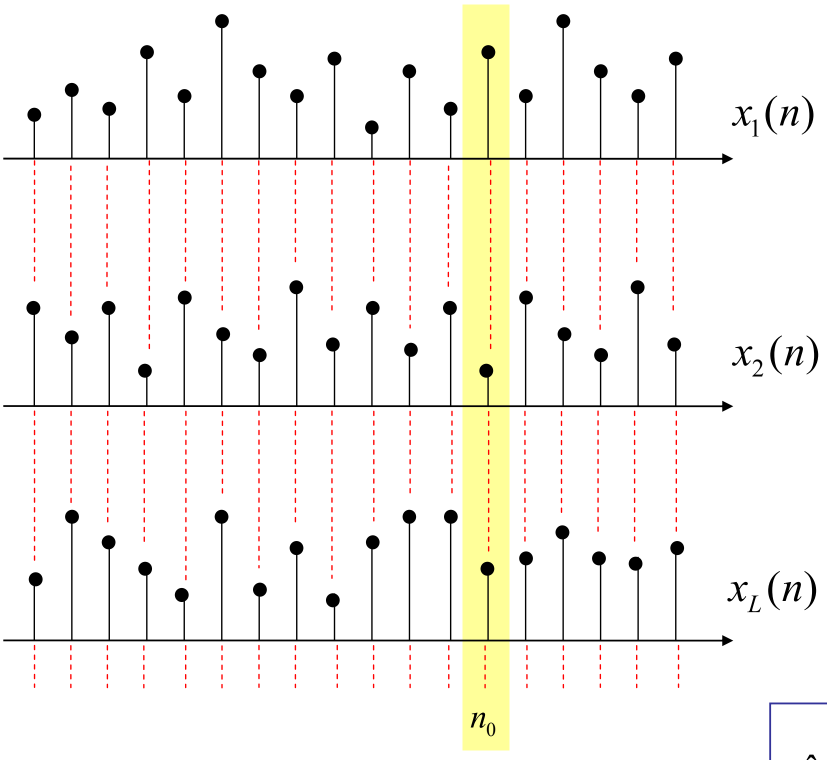
Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

- Η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση μιας τυχαίας διαδικασίας αποτελούν στατιστικούς μέσους όρους που αναφέρονται σε όλες τις συναρτήσεις δείγματα (πραγματοποιήσεις) της διαδικασίας. Ωστόσο, στην πράξη έχουμε διαθέσιμο ένα σύνολο παρατηρήσεων από μία μόνο πραγματοποίηση της διαδικασίας, και από τις παρατηρήσεις αυτές καλούμαστε να εκτιμήσουμε τα παραπάνω μεγέθη.

- Έστω μια τυχαία διαδικασία για την οποία έχουμε μια συλλογή από L υλοποιήσεις, δηλαδή σήματα διακριτού χρόνου $x_i(n)$ για $i = 1,2,\dots,L$. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής ως εξής:

$$\boxed{\hat{m}_x(n) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i(n)} \longleftarrow \text{εξαρτάται από το } n$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

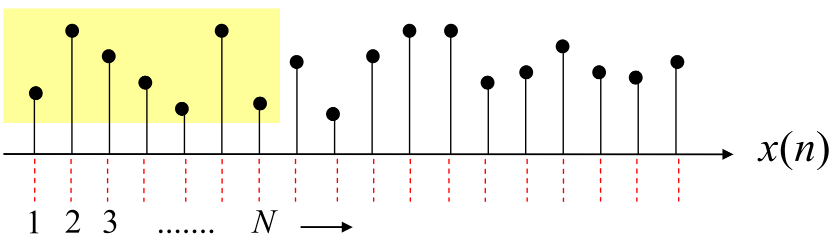


$$\boxed{\hat{m}_x(n_0) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i(n_0)}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

- Όταν όμως έχουμε διαθέσιμη μόνο μία πραγματοποίηση της τυχαίας διαδικασίας, η παραπάνω εκτίμηση δεν έχει νόημα. Επειδή, έχουμε διαθέσιμες N παρατηρήσεις της τυχαίας διαδικασίας, δηλαδή N δείγματα της συγκεκριμένης υλοποίησης, μια εκτίμηση της μέσης τιμής είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\hat{m}_x(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)} \longleftarrow \text{εξαρτάται από το } N$$



- Για να έχει νόημα ο εκτιμητής $\hat{m}_x(N)$ θα πρέπει η μέση τιμή της διαδικασίας να μην εξαρτάται από το n. Για παράδειγμα, αν η διαδικασία είναι WSS, τότε είναι $m_x(n) = m_x$.

Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

- Το ερώτημα που δημιουργείται είναι αν ο μέσος όρος $\hat{m}_x(N)$ συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή.

- Αν ο δειγματικό μέσος όρος $\hat{m}_x(N)$ μιας WSS διαδικασίας συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή υπό την έννοια των μέσων τετραγώνων, τότε η διαδικασία καλείται εργοδική ως προς τη μέση τιμή (ergodic in the mean).

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} E\{|\hat{m}_x(N)-m_x|^2\}=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{N\to\infty} \hat{m}_x(N)=m_x}$$

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι ο εκτιμητής να είναι συνεπής, δηλαδή:
  - Ο εκτιμητής να είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος: $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{m}_x(N)\}=m_x$
  - Η διασπορά της εκτίμησης να τείνει στο μηδέν καθώς $N\to\infty$:
    $\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{m}_x(N))=0$

Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

- Από τον ορισμό του εκτιμητή $\hat{m}_x(N)$ προκύπτει ότι ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος (άρα και ασυμπτωτικά αμερόληπτος).

- Αποδεικνύεται ότι: $\mathrm{var}(\hat{m}_x(N))=\frac{1}{N}\sum_{k=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)c_x(k)$

  Για να ισχύει και η δεύτερη συνθήκη αρκεί: $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)c_x(k)=0$

- Θεώρημα 1: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η WSS τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς τη μέση τιμή είναι:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}c_x(k)=0$$

- Θεώρημα 2: Ικανές συνθήκες για να είναι η WSS τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς τη μέση τιμή είναι:

$$c_x(0)<\infty \quad \text{και} \quad \lim_{k\to\infty}c_x(k)=0$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα

- Αντίστοιχα, θέλουμε να εξετάσουμε την εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης για μια WSS διαδικασία, $r_x(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\}$. Θεωρούμε τον εκτιμητή:

$$\boxed{\hat{r}_x(k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)}$$

- Αν η εκτίμηση $\hat{r}_x(k,N)$ συγκλίνει στην πραγματική τιμή $r_x(k)$ υπό την έννοια των μέσων τετραγώνων, τότε η διαδικασία καλείται εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση (autocorrelation ergodic).

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} E\{|\hat{r}_x(k,N) - r_x(k)|^2\} = 0} \Rightarrow \boxed{\lim_{N\to\infty} \hat{r}_x(k,N) = r_x(k)}$$

- Θεώρημα 3: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η WSS Gaussian τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση είναι:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_x^2(k) = 0$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φάσμα ισχύος

- Ονομάζουμε φασματική πυκνότητα ισχύος (power spectral density) ή φάσμα ισχύος (power spectrum) μιας τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$\boxed{P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k)e^{-jk\omega}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_x(e^{j\omega})e^{jk\omega}d\omega}$$

Το φάσμα ισχύος εκφράζει την κατανομή της ισχύος της τυχαίας διαδικασίας στις διάφορες συχνότητες.

- Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, ο ορισμός για το φάσμα ισχύος είναι:

$$P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k)z^{-k}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φάσμα ισχύος

- Το φάσμα ισχύος μιας WSS διαδικασίας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Ιδιότητα 1: Συμμετρία. $\boxed{P_x(e^{j\omega}) = P_x^*(e^{j\omega})}$ ⇒ Το φάσμα έχει πραγματικές τιμές.
- Ιδιότητα 2: Θετικές τιμές. $\boxed{P_x(e^{j\omega}) \geq 0}$
- Ιδιότητα 3: Συνολική ισχύς μιας WSS διαδικασίας μηδενικής μέσης τιμής.

$$\boxed{E\{|x(n)|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_x(e^{j\omega})d\omega}$$

- Ιδιότητα 4: Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας μηδενικής μέσης τιμής φράσσονται άνω και κάτω από τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του φάσματος:

$$\boxed{\min_{\omega} P_x(e^{j\omega}) \leq \lambda_i \leq \max_{\omega} P_x(e^{j\omega})}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φιλτράρισμα τυχαίων διαδικασιών

- Έστω $x(n)$ μια τυχαία διαδικασία WSS με μέση τιμή m_x και αυτοσυσχέτιση $r_x(k)$. Το διακριτό σήμα $x(n)$ διέρχεται από ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

- Θέλουμε να μελετήσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυσχέτιση, φάσμα ισχύος) του σήματος εξόδου.

- Καταρχήν, το σήμα εξόδου $y(n)$ είναι τυχαία διαδικασία: προκύπτει ως μία συνάρτηση της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$:

$$y(n) = g[x(n)] = \underbrace{x(n) * h(n)}_{\text{συνέλιξη}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φιλτράρισμα τυχαίων διαδικασιών

- Υπολογίζουμε τη μέση τιμή της εξόδου:

$$E\{y(n)\} = E\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\underbrace{E\{x(n-k)\}}_{\text{WSS διαδικασία, άρα ανεξάρτητο του } n-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)m_x = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\underbrace{e^{-jk0}}_{=1}$$

$$= m_x H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0}$$

Διαπιστώνουμε ότι, η μέση τιμή της εξόδου είναι σταθερά (ανεξάρτητη του n) και σχετίζεται με τη μέση τιμή της εισόδου μέσω ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα, ο οποίος είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα ω = 0.

Τυχαίες Διαδικασίες: Φιλτράρισμα τυχαίων διαδικασιών

- Υπολογίζουμε την ετεροσυσχέτιση μεταξύ εξόδου και εισόδου:

$$r_{yx}(k,l) = E\{y(k)x^*(l)\} = E\{[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(k-m)]x^*(l)\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\underbrace{E\{x(k-m)x^*(l)\}}_{\text{WSS διαδικασία, άρα εξαρτάται από τη διαφορά } k-m-l} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(k-m-l)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(k-l-m)$$

Διαπιστώνουμε ότι, η ετεροσυσχέτιση εξαρτάται από τη διαφορά k-l.

- Αν $k - l = n$, τότε: $$r_{yx}(l+n,l) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(n-m) = h(n) * r_x(n)$$

$$r_{yx}(l+n,l) \equiv r_{yx}(n) = h(n) * r_x(n)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φιλτράρισμα τυχαίων διαδικασιών

- Υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση της εξόδου:

$$r_y(n+k,n) = E\{y(n+k)y^*(n)\} = E\{y(n+k)[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)x^*(n-l)]\}$$

$$= E\{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)y(n+k)x^*(n-l)\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)\underbrace{E\{y(n+k)x^*(n-l)\}}_{\text{Δείξαμε ότι εξαρτάται από το lag}}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)r_{yx}(k+l)$$

$$= h^*(k) * r_{yx}(-k) = h^*(-k) * r_{yx}(k)$$

Διαπιστώνουμε ότι η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από το lag k.

⇩

$$r_y(n+k,n) \equiv r_y(k) = h^*(-k) * h(k) * r_x(k)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Φιλτράρισμα τυχαίων διαδικασιών

- Δείξαμε ότι για την τυχαία διαδικασία $y(n)$ ισχύει:

1. Η μέση τιμή της εξόδου είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου: $m_y(n) = m_y$
2. Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από το lag: $r_y(n+k,n) \equiv r_y(k)$

- Επιπλέον:
  - Αφού η διαδικασία $x(n)$ είναι WSS, δηλαδή $\sigma_x^2 < \infty$, σημαίνει ότι η είσοδος είναι φραγμένη: $|x(n)| < \infty$
  - Αφού το σύστημα $h(n)$ είναι ευσταθές, και η έξοδος είναι φραγμένη: $|y(n)| < \infty$

3. Άρα, η διασπορά της εξόδου είναι φραγμένη: $c_y(0) < \infty$

- Από 1,2,3 συμπεραίνουμε ότι η έξοδος $y(n)$ είναι WSS τυχαία διαδικασία.

- Επιπλέον, αφού η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$ είναι WSS τυχαίες διαδικασίες και η ετεροσυσχέτιση r_{yx} εξαρτάται από το lag $r_{yx}(n+k,n) \equiv r_{yx}(k)$ είναι και από κοινού WSS τυχαίες διαδικασίες.

- Υπολογίζουμε τη διασπορά της εξόδου:

$$\sigma_y^2(n) = E\{y(n)y^*(n)\} - m_y(n)m_y^*(n)$$

$$= E\{y(n+0)y^*(n)\} - \underbrace{m_y(n+0)m_y^*(n)}_{\text{ανεξάρτητο του } n}$$

$$= r_y(0) - m_y m_y^* = c_y(0)$$

όπου:

$$r_y(0) = h^*(-k) * h(k) * r_x(k)\Big|_{k=0} = h^*(-k) * [\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) r_x(k-l)]\Big|_{k=0}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) r_x(m-l)] h^*(k+m)\Big|_{k=0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) r_x(m-l) h^*(m)$$

- Έστω ότι το σύστημα έχει πεπερασμένη κρουστική απόκριση:

$$\boldsymbol{h} = \left[h(0) \;\; h(1) \;\; \ldots \;\; h(N-1)\right]^T$$

- Η ισχύς εξόδου είναι:

$$\mathrm{E}\{|y(n)|^2\} = \mathrm{E}\{y(n)y^*(n)\} = r_y(0) = \sum_{m=0}^{N-1} h^*(m) \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} h(l) r_x(m-l)}_{u(m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h^*(m) u(m) = \underbrace{\boldsymbol{h}^H \boldsymbol{u}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{h}^H \boldsymbol{u} = \left[h^*(0) \;\; h^*(1) \;\; \ldots \;\; h^*(N-1)\right]^T \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}}$$

- ...συνέχεια:

$$u(m) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{r}_x(m) = \boldsymbol{r}_x^T(m)\boldsymbol{h} \quad \Rightarrow \quad u(m) = \underbrace{\left[r_x(m) \;\; r_x(m-1) \;\; \ldots \;\; r_x(m-N+1)\right]^T}_{\boldsymbol{r}_x^T(m)} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}$$

- Τελικά:

$$\mathrm{E}\{|y(n)|^2\} = \boldsymbol{h}^H \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}^H \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \ldots & r_x(-N+1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \ldots & r_x(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \ldots & r_x(0) \end{bmatrix} \boldsymbol{h}$$

$$= \boldsymbol{h}^H \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \ldots & r_x^*(N-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \ldots & r_x^*(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \ldots & r_x(0) \end{bmatrix} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{h}$$

- Υπολογίζουμε το φάσμα εξόδου:

$$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

Διαπιστώνουμε ότι το φάσμα εξόδου ισούται με το φάσμα εισόδου πολλαπλασιασμένο με το τετράγωνο του μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

- Μια WSS διαδικασία $u(n)$ ονομάζεται λευκός θόρυβος (white noise) με μέση τιμή m_u και διασπορά σ_u^2 αν η αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική για όλα τα lag εκτός από μηδέν:

$$r_u(k) = \sigma_u^2 \delta(k)$$

$$\Downarrow$$

$$P_u(e^{j\omega}) = \sigma_u^2 \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Παραγοντοποίηση φάσματος

- Έχουμε αναφέρει ότι το φάσμα μιας WSS διαδικασίας με πραγματικές τιμές είναι μια πραγματική, θετική, περιοδική συνάρτηση της συχνότητας. Αποδεικνύεται ότι αν $P_x(e^{j\omega})$ είναι συνεχής συνάρτηση του ω, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*)}$$

όπου:

$$\sigma_0^2 = \exp\{c(0)\} \qquad \underbrace{c(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln P_x(e^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega}_{\text{Αντίστροφο ΜΦΔΧ}}$$

$$Q(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c(k) z^{-k}\right\}$$

$$Q^*(1/z^*) = \exp\left\{\sum_{k=-\infty}^{-1} c(k) z^{-k}\right\}$$

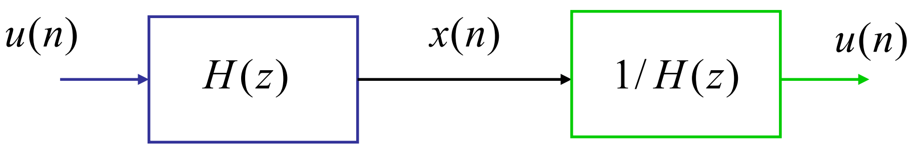
- Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται παραγοντοποίηση φάσματος (spectral factorization).

Τυχαίες Διαδικασίες: Παραγοντοποίηση φάσματος

- Κάθε διαδικασία που μπορεί να παραγοντοποιηθεί κατά $P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*)$ ονομάζεται κανονική (regular) διαδικασία. Οι κανονικές διαδικασίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Ιδιότητα 1: Κάθε κανονική διαδικασία μπορεί να υλοποιηθεί ως η έξοδος ενός αιτιατού, ευσταθούς φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που οδηγείται από σήμα λευκού θορύβου $u(n)$ με διασπορά σ_0^2. Η αναπαράσταση αυτή είναι γνωστή ως innovation αναπαράσταση της διαδικασίας.

- Ιδιότητα 2: Το αντίστροφο φίλτρο $1/H(z)$ καλείται whitening φίλτρο. Δηλαδή, αν η διαδικασία φιλτραριστεί από το $1/H(z)$, τότε η έξοδος θα είναι λευκός θόρυβος με διασπορά σ_0^2. Η διαδικασία $u(n)$ ονομάζεται innovations διαδικασία.



Τυχαίες Διαδικασίες: Παραγοντοποίηση φάσματος

- Ιδιότητα 3: Εφόσον οι διαδικασίες $x(n)$ και $u(n)$ σχετίζονται με έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό, δηλαδή κάθε μία μπορεί να παραχθεί από την άλλη, τότε και οι δύο περιέχουν την ίδια πληροφορία.

- Ορίζουμε μια διαδικασία ως προβλέψιμη (predictable), αν υπάρχει ένα σύνολο συντελεστών $\alpha(k)$, ώστε:

$$x_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k) x_p(n-k)$$

δηλαδή η $x_p(n)$ μπορεί να προβλεφθεί χωρίς σφάλματα ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων τιμών της.

$$\Downarrow$$

$$P_{x_p}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} a(k) u(\omega - \omega_k)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Παραγοντοποίηση φάσματος

- Θεώρημα ανάλυσης Wold: Μια WSS τυχαία διαδικασία $x(n)$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο διαδικασίες $x_r(n)$ και $x_p(n)$, όπου $x_r(n)$ είναι μια κανονική διαδικασία και $x_p(n)$ είναι μια προβλέψιμη διαδικασία, οι οποίες είναι ορθογώνιες:

$$\boxed{x(n) = x_r(n) + x_p(n)} \qquad \boxed{E\{x_r(n) x_p^*(n)\} = 0}$$

- Άρα το φάσμα της διαδικασίας $x(n)$ αποτελείται από το συνεχές τμήμα $P_{x_r}(e^{j\omega})$ και από το διακριτό τμήμα $P_{x_p}(e^{j\omega})$. Το τελευταίο δημιουργεί κρουστικές γραμμές στο φάσμα.

$$P_x(e^{j\omega}) = P_{x_r}(e^{j\omega}) + P_{x_p}(e^{j\omega}) = P_{x_r}(e^{j\omega}) + \sum_{k=1}^{N} a(k) u(\omega - \omega_k)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Θεωρούμε ένα αιτιατό, ευσταθές, ΓΧΑ σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς έχει p πόλους και q μηδενικά. Εφαρμόζουμε στο σύστημα $H(z)$ ως είσοδο λευκό θόρυβο $u(n)$ με διασπορά σ_u^2 :

$$u(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x(n)$$

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_q(k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}}$$

- Η έξοδος $x(n)$ είναι WSS διαδικασία με φάσμα ισχύος:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma_u^2 \left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \sigma_u^2 \frac{\left|B_q(e^{j\omega})\right|^2}{\left|A_p(e^{j\omega})\right|^2}$$

- Μια διαδικασία με το παραπάνω φάσμα ισχύος ονομάζεται autoregressive moving average διαδικασία τάξης (p,q) και συμβολίζουμε ARMA(p,q).

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Η σχέση μεταξύ εισόδου $u(n)$ και εξόδου $x(n)$ δίνεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών:

$$\boxed{x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b_q(k) u(n-k)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(n)x^*(n-k) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) x(n-l) x^*(n-k) = \sum_{l=0}^{q} b_q(l) u(n-l) x^*(n-k) \Rightarrow$$

$$E\{x(n)x^*(n-k) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) x(n-l) x^*(n-k)\} = E\{\sum_{l=0}^{q} b_q(l) u(n-l) x^*(n-k)\} \Rightarrow$$

$$E\left\{x(n)x^*(n-k)\right\} + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) E\left\{x(n-l) x^*(n-k)\right\} = \underbrace{\sum_{l=0}^{q} b_q(l) E\left\{u(n-l) x^*(n-k)\right\}}_{\text{Αφού u(n) WSS, οι x(n) και u(n) είναι από κοινού WSS.}} \Rightarrow$$

$$r_x(k) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) r_x(k-l) = \sum_{l=0}^{q} b_q(l) r_{ux}(k-l)$$

- Δηλαδή και η σχέση μεταξύ αυτοσυσχέτισης εξόδου και ετεροσυσχέτισης ανάμεσα σε έξοδο και είσοδο ικανοποιεί την ίδια εξίσωση διαφορών:

$$\boxed{r_x(k)+\sum_{l=1}^{p}a_p(l)r_x(k-l)=\sum_{l=0}^{q}b_q(l)r_{ux}(k-l)}$$

- Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης με την παρακάτω ισοδύναμη έκφραση:

$$r_{ux}(k-l)=E\{u(k)x^*(l)\}=E\{u(k)[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}u^*(m)h^*(l-m)]\}$$

$$=E\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}u(k)u^*(m)h^*(l-m)\}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\underbrace{E\{u(k)u^*(m)\}}_{=\begin{cases}\sigma_u^2 & \text{για } k=m\\ 0 & \text{για } k\neq m\end{cases}}h^*(l-m)$$

$$=\sigma_u^2 h^*(l-k)$$

- Έχουμε λοιπόν:

$$\boxed{r_x(k)+\sum_{l=1}^{p}a_p(l)r_x(k-l)=\sum_{l=0}^{q}b_q(l)r_{ux}(k-l)}$$

$$\Downarrow$$

$$r_x(k)+\sum_{l=1}^{p}a_p(l)r_x(k-l)=\sum_{l=0}^{q}b_q(l)\sigma_u^2 h^*(l-k)=\sigma_u^2\sum_{l=0}^{q}b_q(l)h^*(l-k)$$

- Δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή $h(n)=0$ για $n<0$ έχουμε:

$$c_q(k)=\sum_{l=0}^{q}b_q(l)h^*(l-k)=\sum_{l=k}^{q}b_q(l)h^*(l-k)=\sum_{m=0}^{q-k}b_q(k+m)h^*(m)$$

$$=\begin{cases}\sum_{l=0}^{q-k}b_q(k+l)h^*(l) & \text{αν } 0\le k\le q\\ 0 & \text{αν } k>q\end{cases}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Τελικά:

$$\boxed{r_x(k) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) r_x(k-l) = \begin{cases} \sigma_u^2 c_q(k) & \text{αν } 0 \le k \le q \\ 0 & \text{αν } k > q \end{cases}}$$

- Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι γνωστό ως εξισώσεις Yule-Walker.

$$\begin{aligned}
k=0: &\quad r_x(0) + a_p(1) r_x(-1) + a_p(2) r_x(-2) + \ldots + a_p(p) r_x(-p) = \sigma_u^2 c_q(0) \\
k=1: &\quad r_x(1) + a_p(1) r_x(0) + a_p(2) r_x(-1) + \ldots + a_p(p) r_x(1-p) = \sigma_u^2 c_q(1) \\
\vdots &\qquad\qquad \vdots \\
k=q: &\quad r_x(q) + a_p(1) r_x(q-1) + a_p(2) r_x(q-2) + \ldots + a_p(p) r_x(q-p) = \sigma_u^2 c_q(q) \\
k=q+1: &\quad r_x(q+1) + a_p(1) r_x(q) + a_p(2) r_x(q-1) + \ldots + a_p(p) r_x(q-p+1) = 0 \\
\vdots &\qquad\qquad \vdots \\
k=q+p: &\quad r_x(q+p) + a_p(1) r_x(q+p-1) + a_p(2) r_x(q+p-2) + \ldots + a_p(p) r_x(q) = 0
\end{aligned}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Γράφουμε σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \ldots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \ldots & r_x(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q) & r_x(q-1) & \ldots & r_x(q-p) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \ldots & r_x(q-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q+p) & r_x(q+p-1) & \ldots & r_x(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} c_p(0) \\ c_p(1) \\ \vdots \\ c_p(q) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Όταν q=0, το σύστημα έχει μόνο πόλους και η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z)=\frac{b(0)}{A_p(z)}=\frac{b(0)}{1+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)z^{-k}}$$

- Η διαδικασία *x(n)* ονομάζεται autoregressive τάξης *p* και συμβολίζουμε AR(*p*). Το φάσμα εξόδου είναι:

$$P_x(e^{j\omega})=\sigma_u^2\left|H(e^{j\omega})\right|^2=\sigma_u^2\frac{|b(0)|^2}{\left|A_p(e^{j\omega})\right|^2}$$

- Οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$$r_x(k)+\sum_{l=1}^{p}a_p(l)r_x(k-l)=\sigma_u^2|b(0)|^2\delta(k),\qquad k\geq 0$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Όταν p=0, το σύστημα έχει μόνο μηδενικά και η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{q}b_q(k)z^{-k}$$

- Η διαδικασία *x(n)* ονομάζεται moving average τάξης *q* και συμβολίζουμε MA(*q*). Το φάσμα εξόδου είναι:

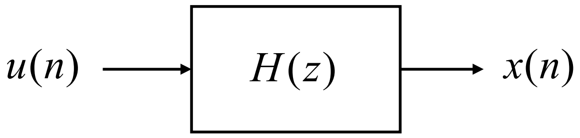
$$P_x(e^{j\omega})=\sigma_u^2\left|H(e^{j\omega})\right|^2=\sigma_u^2\left|B_q(e^{j\omega})\right|^2$$

- Οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$$r_x(k)=\sigma_u^2\sum_{l=0}^{q-|k|}b_q(l+|k|)b_q^*(l),\qquad k\geq 0$$

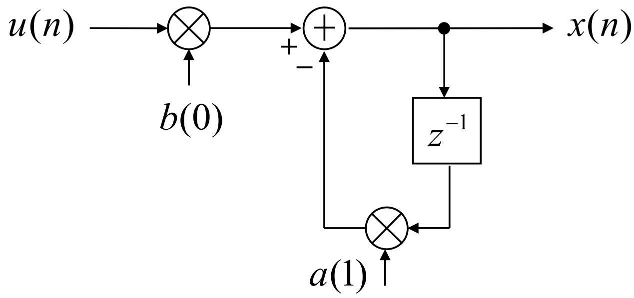
Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- **Παράδειγμα:** Θεωρούμε την τυχαία διαδικασία AR(1) με πραγματικές τιμές, η οποία προκύπτει από την εφαρμογή λευκού θορύβου $u(n)$ με διασπορά $\sigma_u^2 = 1$ στο all-pole φίλτρο $H(z)$:



$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + a(1)z^{-1}}$$

Εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου: $x(n) + a(1)x(n-1) = b(0)u(n) \quad \forall n \geq 0$



Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Αν γνωρίζουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τους συντελεστές. Οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$$r_x(k) + a(1)r_x(k-1) = b^2(0)\delta(k) \ \forall k$$

$$\Downarrow$$

$$\text{για } k = 0: \quad r_x(0) + a(1)r_x(-1) = b^2(0)$$

$$\text{για } k = 1: \quad r_x(1) + a(1)r_x(0) = 0$$

Η διαδικασία AR(p) είναι WSS και επειδή είναι πραγματική, ισχύει η ιδιότητα της συμμετρίας για τις τιμές της αυτοσυσχέτισης: $r_x(-k) = r_x(k)$

Άρα, το σύστημα των εξισώσεων γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} r_x(0) + a(1)r_x(1) &= b^2(0) \\ r_x(1) + a(1)r_x(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b(0) = \sqrt{\frac{r_x^2(0) - r_x^2(1)}{r_x(0)}}, \quad a(1) = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

- Ομοίως, αν γνωρίζουμε τους συντελεστές, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης:

$$r_x(k) + a(1) r_x(k-1) = b^2(0)\delta(k) \;\; \forall k$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{για } k=0: & r_x(0) + a(1) r_x(-1) = b^2(0) \\ \text{για } k\neq 0: & r_x(k) + a(1) r_x(k-1) = 0 \end{array}\right\}$$

Για $k \neq 0$ παρατηρούμε ότι:

$$k=1: \quad r_x(1) = -a(1) r_x(0)$$

$$k=2: \quad r_x(2) = -a(1) r_x(1) = -a(1)[-a(1) r_x(0)] = [-a(1)]^2 r_x(0)$$

$$k=3: \quad r_x(3) = -a(1) r_x(2) = -a(1)[-a(1)]^2 r_x(0) = [-a(1)]^3 r_x(0)$$

$$\vdots$$

$$k=n: \quad r_x(n) = -a(1) r_x(n-1) = [-a(1)]^n r_x(0)$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Μοντέλα ARMA

Δηλαδή: $$r_x(k) = [-a(1)]^k r_x(0) \qquad \forall k \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_x(-k) = r_x(k) = [-a(1)]^k r_x(0) \qquad \forall k \geq 0$$

Άρα: $$\boxed{r_x(k) = [-a(1)]^{|k|} r_x(0) \qquad \forall k}$$

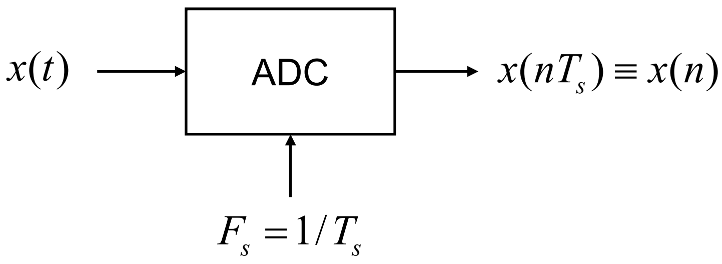
Για να βρούμε το $r_x(0)$ λύνουμε το 2x2 σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } k=0: & r_x(0) + a(1) r_x(-1) = b^2(0) \\ \text{Για } k=1: & r_x(1) + a(1) r_x(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} r_x(0) + a(1) r_x(1) = b^2(0) \\ r_x(1) = -a(1) r_x(0) \end{array}\right\} \Rightarrow r_x(0) = \frac{b^2(0)}{1-a^2(1)}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- **Παράδειγμα:** Δίνεται η τυχαία διαδικασία $x(n) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$, η οποία ονομάζεται αρμονική διαδικασία πρώτης τάξης (harmonic process), όπου A είναι σταθερό πλάτος, $\omega_0 = 2\pi f_0$ είναι σταθερή γωνιακή ταχύτητα, και φ είναι τυχαία φάση με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $-\pi \le \phi \le \pi$.

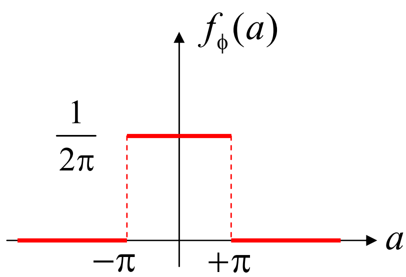


- Ζητείται να υπολογιστούν τα μεγέθη: μέση τιμή, αυτοσυσχέτιση, διασπορά, φάσμα ισχύος. Είναι η διαδικασία WSS; Είναι η διαδικασία εργοδική ως προς τη μέση τιμή;

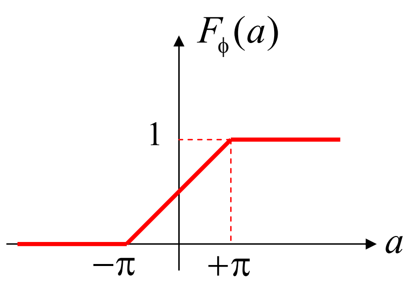
Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Αφού η τυχαία μεταβλητή φ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $-\pi \le \phi \le \pi$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι:

$$f_\phi(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{για } -\pi \le \alpha \le +\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$F_\phi(a) = \begin{cases} 0 & \text{για } \alpha < -\pi \\ \dfrac{a+\pi}{2\pi} & \text{για } -\pi \le \alpha < +\pi \\ 1 & \text{για } +\pi \le \alpha \end{cases}$$



Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Υπολογίζουμε τη μέση τιμή της διαδικασίας:

Η διαδικασία $x(n)$ είναι συνάρτηση ως προς n και φ: $x(n)=g(n;\phi)$

Άρα: $E\{g(n;\phi)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} g(n;a)f_{\phi}(a)da=\int_{-\pi}^{+\pi} A\sin(\omega_0 n+a)\frac{1}{2\pi}da$

$$=\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(\omega_0 n+a)da=\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(-\cos(\omega_0 n+a)\right)' da$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[\cos(\omega_0 n+\pi)-\cos(\omega_0 n-\pi)\right]$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[2\sin\left(\omega_0 n\right)\sin\left(\cancel{-\pi}\right)\right]=0$$

Επομένως, η μέση τιμή είναι μηδενική (σταθερή): $m_x(n)=m_x=0$

Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση της διαδικασίας:

$$r_x(k,l)=E\left\{x(k)x(l)\right\}=E\left\{A\sin(\omega_0 k+\phi)A\sin(\omega_0 l+\phi)\right\}$$

$$=\frac{A^2}{2}E\left\{\cos[\omega_0(k-l)]-\cos[\omega_0(k+l)+2\phi]\right\}$$

$$=\frac{A^2}{2}\left[E\left\{\cos[\omega_0(k-l)]\right\}-E\left\{\cos[\omega_0(k+l)+2\phi]\right\}\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}\left[\cos[\omega_0(k-l)]-\cancel{E\left\{\cos[\omega_0(k+l)+2\phi]\right\}}\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-l)]$$

Επομένως, η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από το lag: $r_x(n)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 n)$

Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Υπολογίζουμε τη διασπορά της διαδικασίας:

$$\sigma_x^2(n) = E\left\{\left[x(n) - \cancel{m_x}\right]^2\right\} = E\left\{x^2(n)\right\} = r_x(0)$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 0) = \frac{A^2}{2}$$

Επομένως, η διασπορά είναι σταθερή και είναι φραγμένη: $\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2 < \infty$

- Δείξαμε ότι:
  - Η μέση τιμή είναι σταθερή: $m_x(n) = m_x$
  - Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από το lag: $r_x(k,l) = r_x(k-l)$
  - Η διασπορά είναι φραγμένη: $\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2 < \infty$

Άρα η αρμονική διαδικασία πρώτης τάξης είναι WSS.

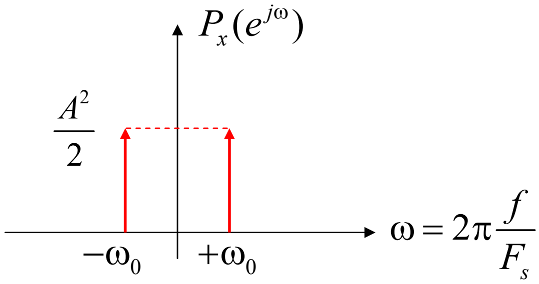
Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Υπολογίζουμε το φάσμα της διαδικασίας:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 k)e^{-j\omega k}$$

$$= \frac{A^2}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 k)e^{-j\omega k}$$

$$= \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$



- Υπολογίζουμε τη μέση ισχύ της διαδικασίας:

$$E\left\{x^2(n)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^2}{2}2\pi\right) = \frac{A^2}{2}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

- Για να διαπιστώσουμε αν η διαδικασία είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή, θα ελέγξουμε αν ισχύει το Θεώρημα 1, δηλαδή αν:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_x(k) = 0$$

όπου $c_x(k)$ είναι η αυτοσυνδιασπορά.

- Ισχύει: $$c_x(k) = r_x(k) - \cancel{m_x^2}(k) = r_x(k) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 k) \qquad \forall k$$

Άρα: $$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 k) = \frac{A^2}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(\omega_0 k)$$

$$= \frac{A^2}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 k}\right\} = \frac{A^2}{2N}\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\omega_0 k}\right\}$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Αρμονική διαδικασία

Συνέχεια:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_x(k) = \frac{A^2}{2N}\mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0}}\right\} = \frac{A^2}{2N}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j\omega_0\frac{N}{2}-j\omega_0\frac{N}{2}} - e^{j\omega_0\frac{N}{2}+j\omega_0\frac{N}{2}}}{e^{j\omega_0\frac{1}{2}-j\omega_0\frac{1}{2}} - e^{j\omega_0\frac{1}{2}+j\omega_0\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2N}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j\omega_0\frac{N}{2}}\left(e^{-j\omega_0\frac{N}{2}} - e^{j\omega_0\frac{N}{2}}\right)}{e^{j\omega_0\frac{1}{2}}\left(e^{-j\omega_0\frac{1}{2}} - e^{j\omega_0\frac{1}{2}}\right)}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2N}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j\omega_0\frac{N}{2}}2j\sin\left(\omega_0\frac{N}{2}\right)}{e^{j\omega_0\frac{1}{2}}2j\sin\left(\omega_0\frac{1}{2}\right)}\right\} = \frac{A^2}{2N}\frac{\sin\left(\omega_0\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\omega_0\frac{1}{2}\right)}\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0\frac{N-1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2N}\frac{\sin\left(\omega_0\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\omega_0\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\omega_0\frac{N-1}{2}\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Άρα η αρμονική διαδικασία πρώτης τάξης είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή.